



# Formulation de la théorie effective à basse énergie du secteur électrofaible sans particule de Higgs

Johannes Hirn

## ► To cite this version:

Johannes Hirn. Formulation de la théorie effective à basse énergie du secteur électrofaible sans particule de Higgs. Physique des Hautes Energies - Expérience [hep-ex]. Université Paris Sud - Paris XI, 2004. Français. NNT : . tel-00008357

**HAL Id: tel-00008357**

**<https://theses.hal.science/tel-00008357>**

Submitted on 3 Feb 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

12 juillet 2004

IPNO-T-04-05

Thèse présentée par

**Johannes HIRN**

pour obtenir le grade de

Docteur de l'université Paris XI-Orsay

**Formulation de la théorie effective à basse énergie  
du secteur électrofaible sans particule de Higgs**



UNIVERSITÉ PARIS XI-ORSAY

THÈSE  
présentée par

Johannes HIRN

pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI-ORSAY  
spécialité: Physique Théorique

# Formulation de la théorie effective à basse énergie du secteur électrofaible sans particule de Higgs

Soutenue le 12 juillet 2004 devant le jury composé de:

MM.	F. BOUDJEMA	Examineur
	A. DEANDREA	Rapporteur
	U. ELLWANGER	Président
	M. KNECHT	Rapporteur
	J. STERN	Directeur de thèse



# Résumé

La théorie effective à basse énergie du secteur électrofaible sans particule de Higgs utilise les méthodes de la Théorie de Perturbation Chirale. La formule de comptage de Weinberg permet un développement cohérent en boucles et la renormalisation correspondante. On trouve que certains opérateurs effectifs, supprimés par une échelle de masse dans le cas du Modèle Standard, ne le sont plus dans le cas sans particule de Higgs. De plus, ils apparaissent à l'ordre dominant du développement chirale, en conflit avec les expériences. Pour décrire leur suppression, on demande l'invariance sous la symétrie obtenue lorsque le secteur composite (produisant les trois modes de Goldstone) et le secteur élémentaire (quarks, leptons et champs de Yang-Mills) sont découplés. On introduit alors les couplages en réduisant la symétrie à  $SU(2) \times U(1)$ , *via* des spurions. Les opérateurs indésirables n'apparaissent qu'aux ordres supérieurs du développement simultané en puissances des impulsions et des spurions. De plus, la brisure de l'isospin faible est traitée de façon systématique et la formule de comptage de Weinberg peut être reproduite. Les spurions permettent de rendre compte des faibles masses des neutrinos actifs. Les trois neutrinos droits, légers par rapport au TeV, introduits afin de préserver une symétrie custodiale, sont quasi-stériles et stables. On étudie également le raccordement des anomalies dans le secteur composite, généralisant la construction de Wess-Zumino: on obtient une contrainte sur la théorie sous-jacente. Appliquant le formalisme des spurions aux modèles *moose* linéaires ouverts, on démontre des règles de somme de Weinberg généralisées.

# Abstract

The low-energy effective theory of electroweak symmetry-breaking without a Higgs particle is constructed using the methods of Chiral Perturbation Theory. Weinberg's power-counting formula demonstrates the consistency of the loop expansion, with the corresponding renormalization. We find that the suppression of effective operators by a mass scale, which was automatic in the case of the Standard Model, no longer holds in the Higgs-less case. Moreover, the incriminated operators appear at leading order in the chiral expansion, at variance with experiments. To account for their suppression, invariance under a larger symmetry is required, corresponding to the composite sector (which produces the three Goldstone modes) being decoupled from the elementary sector (quarks, leptons and Yang-Mills fields). The couplings are introduced via spurions: this reduces the symmetry to  $SU(2) \times U(1)$ . In the simultaneous expansion in powers of momenta and spurions, the aforementioned operators are relegated to higher orders. In addition, the method allows for a systematic treatment of weak isospin breaking. The Weinberg power-counting formula can be recovered, and small neutrino masses accounted for. The three right-handed neutrinos (lighter than the TeV), which are introduced in connection with the custodial symmetry, are quasi-sterile and stable. A constraint on the underlying theory is obtained by studying the anomaly-matching in the composite sector and generalizing the Wess-Zumino construction. The spurion formalism is also applied to open linear moose models, for which generalized Weinberg sum rules are derived.



# Table des matières

Résumé . . . . .	3
Abstract . . . . .	3
Glossaire . . . . .	9
Introduction . . . . .	11
Plan de l'exposé . . . . .	15
<b>1 Mécanisme de Higgs dans le Modèle Standard . . . . .</b>	<b>19</b>
1.1 Architecture du SM . . . . .	19
1.1.1 Champs de matière . . . . .	19
1.1.2 Champs de jauge . . . . .	20
1.1.3 Couplages des fermions . . . . .	21
1.2 Interactions . . . . .	23
1.2.1 Structure des courants fermioniques . . . . .	23
1.2.1.1 Champs physiques pour les bosons vecteurs . . . . .	23
1.2.1.2 Interactions fermions-vecteurs . . . . .	24
1.2.2 Interactions entre bosons vecteurs . . . . .	25
1.3 Mécanisme de Higgs dans le SM . . . . .	26
1.3.1 Interactions entre champs de jauge et scalaires sans masses . . . . .	26
1.3.2 Doublet complexe de Higgs . . . . .	27
1.3.3 Masses des bosons vecteurs . . . . .	29
1.4 Conséquences du mécanisme de Higgs élémentaire . . . . .	31
1.4.1 Interactions de Yukawa et masses de Dirac des fermions . . . . .	31
1.4.2 Matrice CKM . . . . .	32
1.5 Succès phénoménologiques du SM . . . . .	33
1.5.1 Remarques sur les calculs de boucles . . . . .	33
1.5.2 Approximation au pôle du $Z^0$ . . . . .	34
1.5.3 Ajustement de paramètres dans le SM . . . . .	35
1.5.3.1 EWPTs . . . . .	35
1.5.3.2 Correction obliques . . . . .	37
1.6 Le SM comme théorie effective (découplante) . . . . .	38
1.6.1 Mécanisme <i>see-saw</i> et masses de Majorana pour les neutrinos . . . . .	39
1.6.2 Opérateurs <i>irrelevant</i> s . . . . .	40
1.6.2.1 Opérateur effectif de dimension cinq . . . . .	40
1.6.2.2 Opérateurs <i>irrelevant</i> s de dimensions six . . . . .	41
1.6.3 Hiérarchie et naturalité . . . . .	42
1.6.3.1 Divergences quadratiques à la masse du Higgs . . . . .	42
1.6.3.2 Protection du Higgs élémentaire . . . . .	43
1.7 Modèles sans particule de Higgs physique . . . . .	45
1.7.1 Liberté asymptotique et naturalité . . . . .	45
1.7.2 L'exemple de la QCD . . . . .	46
1.7.3 Technicouleur: idée générale . . . . .	47
1.8 Résumé . . . . .	48
<b>2 Théories effectives non-découplantes . . . . .</b>	<b>51</b>
2.1 La QCD à basse énergie . . . . .	51



2.1.1	Symétrie chirale	52
2.1.2	Idées de bases de la théorie effective	54
2.1.3	Réalisation non-linéaire de la symétrie et GBs	54
2.2	Identités de Ward	55
2.2.1	Dans la théorie fondamentale	56
2.2.2	Dans la théorie effective	57
2.3	Théorie de perturbation chirale	58
2.3.1	Comptage de puissance et développement en boucles	58
2.3.1.1	Lagrangien effectif	58
2.3.1.2	Formule de comptage de Weinberg	60
2.3.2	Renormalisation ordre par ordre	61
2.3.3	Traitement des masses des pions	62
2.4	Théories effectives non-découplantes: au-delà de la $\chi$ PT	64
2.4.1	Particules protégées: champs de spin 1 et 1/2	64
2.4.2	Généralisation du comptage de puissances	64
2.4.2.1	Champs de jauge	64
2.4.2.2	Fermions chiraux	66
2.5	Résumé	67
<b>3</b>	<b>Yang-Mills massif: le cas SU(2)</b>	<b>69</b>
3.1	Lagrangien effectif	69
3.1.1	Ordre $\mathcal{O}(p^2)$	69
3.1.2	Ordre $\mathcal{O}(p^3)$	71
3.1.3	Ordre $\mathcal{O}(p^4)$	71
3.2	Opérateurs invariants de jauge	72
3.2.1	Redéfinitions des champs	73
3.2.2	Opérateur des fluctuations quadratiques	75
3.3	Renormalisation à une boucle	76
3.3.1	Méthode du noyau de la chaleur	76
3.3.1.1	Contribution scalaire	77
3.3.1.2	Contribution vectorielle	78
3.3.1.3	Divergences à une boucle	79
3.3.2	Fonction à deux points des courants de Noether	81
3.4	Résumé	82
<b>4</b>	<b>Bosons de Goldstone, résonances vectorielles et règles de somme de Weinberg</b>	<b>85</b>
4.1	Spurions et <i>mooses</i>	86
4.1.1	GBs et champs de jauge	86
4.1.2	Introduction des couplages le long de la chaîne	88
4.1.2.1	Spurions réels	88
	Démonstration	89
4.1.2.2	Lagrangien $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0)$	90
4.1.2.3	Structure du lagrangien effectif	92
4.1.3	Redéfinitions des champs	93
4.2	Le corrélateur gauche-droit	94
4.2.1	WSRs généralisées	95
4.2.1.1	WSRs et localité	95
4.2.1.2	Autres aspects de $\Pi_{LR}$ à haute énergie	97
4.2.2	Autres conséquences	98
4.2.3	Corrections aux WSRs	99
4.3	Résumé	100
<b>5</b>	<b>Théorie effective pour le secteur électrofaible: utilisation des spurions</b>	<b>103</b>
5.1	Difficultés de la théories effective sans Higgs basée sur la symétrie $SU(2) \times U(1)$	103
5.1.1	Règles de construction	104

5.1.2	Secteur bosonique	105
5.1.3	Fermions	106
5.1.4	Discussion	107
5.2	Couplage entre le secteur de brisure et le secteur élémentaire <i>via</i> des spurions	107
5.2.1	Spurion complexe et isospin droit	108
	Solution des contraintes	109
	Démonstration	110
5.2.2	Bosons	112
5.2.3	Fermions et symétrie $U(1)_{B-L}$	114
	Résultats	116
5.2.4	Couplages des fermions	117
5.2.5	Masses de Dirac	119
5.2.6	Violation du nombre leptonique	120
5.3	Résumé	123
<b>6</b>	<b>Raccordement des anomalies dans la théorie effective pour la brisure électrofaible sans scalaire</b>	<b>127</b>
6.1	Fermions composites et élémentaires	128
6.1.1	Secteur composite	128
6.1.2	Couplage au secteur élémentaire	130
6.2	Anomalies dans la techni-théorie et dans la LEET	133
6.2.1	Anomalies des courants de symétrie de basse énergie de la techni-théorie	133
6.2.2	Variation du déterminant des fermions composites	135
6.2.3	Raccordement des anomalies	137
6.3	Raccordement des anomalies dans une théorie sans particule de Higgs	139
6.3.1	Obstructions dans le secteur composite	139
6.3.2	Fermions élémentaires dans la jauge unitaire	141
6.4	Triangles dans la jauge unitaire	144
6.5	Résumé	147
	<b>Conclusion</b>	<b>149</b>
	<b>Annexe A. Spineurs de Weyl, Dirac et Majorana</b>	<b>153</b>
A.1	Remarques générales	153
A.2	Spineurs de Weyl	153
A.3	Spineurs de Dirac	155
A.4	Spineurs de Majorana	156
	<b>Annexe B. Paramètres obliques et définitions liées</b>	<b>159</b>
B.1	Paramètre(s) $\rho$	159
B.1.1	$\rho_*(0)$	159
B.1.2	$\rho$	160
B.2	Sinus effectif(s) de l'angle de Weinberg	160
B.2.1	$s_f$	160
B.2.2	$s_*(0)$	160
B.2.3	$s_W$	161
B.2.4	$s_0$	161
B.3	Approximations et définitions originales	161
B.4	Définition en termes d'observables	163
	<b>Annexe C. Remarques sur la technicouleur</b>	<b>165</b>
	<b>Annexe D. Remarques sur la limite <math>g \rightarrow 0</math></b>	<b>167</b>
D.1	Normalisation des termes de sources	167
D.2	Ecriture directe du lagrangien effectif en jauge unitaire	167
D.3	Divergences quartiques	168

<b>Annexe E. Compléments sur le noyau de la chaleur</b>	171
E.1 Puissances d'un opérateur	171
E.2 Coefficients de Schwinger-DeWitt pour l'opérateur $\mathcal{D}$	172
E.3 Régularisation dimensionnelle pour les intégrales sur le temps propre	172
E.4 Détails sur les calculs de la section 3.3.1.2	173
Terme $n = 1$	174
Terme $n = 2$	174
Terme $n = 3$	175
Terme $n = 4$	176
E.5 Dérivation alternative des divergences à une boucle	177
E.5.1 Méthode	177
E.5.2 Contributions aux divergences	178
Termes $n = 0$	178
Termes $n = 1$	179
Termes $n = 2$	179
Termes $n = 3$	180
Termes $n = 4$	180
<b>Annexe F. <i>Mooses</i> et déconstruction dimensionnelle</b>	183
F.1 Chaînes de modèles sigma non-linéaires	183
F.2 Couplage <i>via</i> des champs de jauge	184
F.3 Déconstruction dimensionnelle	185
<b>Annexe G. Règles de somme de Weinberg</b>	187
G.1 Dans la limite chirale	187
G.2 Dans la limite chirale et de grand $N_c$	188
<b>Annexe H. Compléments au chapitre 4</b>	189
H.1 Etapes du changement de variables	189
H.2 Dérivation alternative de la première WSR	191
H.3 Dérivation alternative des WSRs généralisées	192
H.4 Dérivation des LECs en arbres	193
H.5 Applications	195
H.5.1 Expression des couplages en fonction des masses	195
H.5.2 Expression du corrélateur gauche-droit	196
H.5.3 Masse électrofaible des PGBs	196
H.6 Le corrélateur gauche-droit à l'ordre $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0)$ dans un cas simple	197
<b>Annexe I. Interactions non-locales le long du <i>moose</i></b>	201
I.1 Interactions entre liens voisins	201
I.2 Interactions entre sites voisins	203
<b>Bibliographie</b>	207

# Glossaire

Dans le texte, on utilisera les abréviations suivantes:

$\chi$ PT:	Théorie de Perturbation Chirale,
CKM:	Cabibbo-Kobayashi-Maskawa,
EWSB:	brisure de la symétrie électrofaible,
EWPTs:	tests de précision électrofaibles,
FCNCs:	courants neutres changeant la saveur,
GB(s):	boson(s) de Goldstone,
LEET(s):	théorie(s) effective(s) à basse énergie,
LEC(s):	constante(s) de basse énergie,
OPE:	développement en produit d'opérateurs,
PGB(s):	boson(s) pseudo-Goldstone,
QED:	électrodynamique quantique,
QCD:	chromodynamique quantique,
SM:	Modèle Standard,
WSR(s):	règle(s) de somme de Weinberg.



# Introduction

Le mécanisme de Higgs [EB64, Hig64, GHK64, Hig66] a initialement été introduit dans le but d'éliminer du spectre les particules scalaires sans masse, prédites par le théorème de Goldstone lorsqu'une symétrie globale est spontanément brisée: les bosons de Goldstone (*Goldstone bosons*, ou GBs) [Nam60, NJL61a, NJL61b, Gol61, GSW62]. Le mécanisme de Higgs nécessite que les GBs soient couplés à des champs de Yang-Mills. Ces derniers deviennent alors massifs, leurs polarisations longitudinales étant fournies par les GBs, lesquels disparaissent du spectre.

C'est ce deuxième aspect qui a été mis à profit dans le contexte du Modèle Standard (*Standard Model*, ou SM) des interactions électrofaibles [Wei67a] afin de donner une masse aux bosons vecteurs faibles  $W^\pm$  et  $Z^0$ , tout en préservant la propriété de renormalisabilité, valable pour les théories de Yang-Mills [tH71b]. En effet, la théorie obtenue après la brisure spontanée due au mécanisme de Higgs *élémentaire* est encore renormalisable [tH71a]. Ceci permet de construire un développement en puissances des constantes de couplage, donnant des prédictions finies à tous les ordres en fonction d'un nombre restreint de paramètres *a priori* libres, qui doivent être fixés expérimentalement. De plus, le nombre de ces constantes reste le même, quelle que soit la précision demandée. Un ingrédient essentiel nécessaire à cette propriété de renormalisabilité est la présence d'une particule scalaire physique: le boson de Higgs.

Nous n'insisterons pas ici sur la renormalisabilité. En effet, le sujet de cette thèse est l'élaboration d'une théorie effective non-découplante, pour laquelle le critère de renormalisabilité en tant que principe directeur est abandonné. Comme nous le verrons aux chapitres 2 et 3, la procédure de renormalisation pour obtenir des résultats finis ordre par ordre dans le développement en puissances des impulsions est cependant similaire, mais met en jeu à chaque ordre de nouveaux opérateurs et de nouvelles constantes, en nombre fini [Wei79c, GL84, GL85].

- Succès du SM

Sur le plan phénoménologique, le SM prédit l'universalité des couplages des bosons vecteurs aux fermions de chiralité gauche, quelle que soit la génération à laquelle ces derniers appartiennent. Cette propriété a trait au caractère non-abélien du groupe de jauge. Lorsque l'on utilise les champs du SM, elle ne peut être violée que par des opérateurs non-renormalisables. L'échelle de masse qui divise ces derniers peut être arbitrairement grande. Ces opérateurs sont donc *irrelevant*s à basse énergie. L'universalité des couplages est par ailleurs bien testée expérimentalement, en particulier pour les leptons [LEP]. De plus, les deux chiralités de fermions ont des propriétés de transformation distinctes sous les symétries de la théorie.

Un autre aspect du SM, que nous décrivons au chapitre 1, mérite d'être souligné: il s'agit de la possibilité de donner des masses *via* le mécanisme de Higgs élémentaire non seulement aux bosons vecteurs, mais aussi aux fermions chiraux [DS79, SSVZ80], à travers les termes d'interactions de Yukawa. Ces termes d'interactions renormalisables impliquent en effet le doublet complexe élémentaire responsable du mécanisme de Higgs. La richesse de la structure ainsi obtenue permet de décrire un large éventail de phénomènes physiques effectivement observés: la matrice de mélange de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) [Cab63, GIM70, KM73] pour les quarks permet des transitions de saveurs *via* les interactions de courants chargés, ainsi que la violation de la symétrie  $CP$ .

Le fait que le SM puisse effectivement accommoder les masses des fermions ainsi que ces phénomènes doit être considéré comme un succès, mais suscite également des interrogations. En effet, on pourrait objecter que le mécanisme de Higgs élémentaire n'explique rien, étant donnée la prolifération de constantes associées à ces interactions de Yukawa. Ceci est évidemment exagéré. En réalité, la dynamique qui doit générer ces constantes réside en dehors du SM lui-même, lequel doit être considéré comme une théorie effective <sup>1</sup>.

---

1. La théorie effective est découplante dans ce cas, puisque lagrangien construit avec tous les opérateurs de dimension quatre est renormalisable.

Il n'en reste pas moins que toute théorie alternative pour la brisure de symétrie électrofaible (*electroweak symmetry breaking*, ou EWSB) doit permettre les mêmes effets physiques pour être crédible. Les théories supersymétriques, en tant qu'extensions du SM, présentent ces mêmes caractéristiques. Pour ce qui est des théories sans particule de Higgs, la difficulté est bien réelle, comme nous le verrons au chapitre 5.

Concernant les premiers effets au-delà du SM, rappelons que les résultats des expériences démontrant des transitions entre saveurs de neutrinos, interprétés en termes d'oscillations entre ces dernières [Pon58, MNS62], impliquent des masses pour les neutrinos. Du point de vue théorique, ceci nécessite une extension du SM original, ce qui est possible et connu depuis longtemps [GMRS79, Yan79]. En revanche, des difficultés peuvent apparaître dans les modèles sans particule de Higgs pour rendre compte des faibles masses des neutrinos.

- Au-delà du SM: modèles

Le succès pratique du SM dans ses prédictions quantitatives a été confirmé à maintes reprises, malgré quelques doutes qui subsistent toujours à un niveau de certitude insuffisant pour mettre le modèle en danger [PDG]. Cependant, comme nous le mentionnons au chapitre 1, il existe des indications qualitatives du fait que le SM est insuffisant ou du moins incomplet: il s'agit du problème de hiérarchie entre l'échelle électrofaible et celle de la nouvelle physique. La résolution de ce problème nécessite la stabilisation de la masses du boson de Higgs physique, sujette à des corrections quantiques potentiellement importantes <sup>2</sup>.

Une réponse technique à ces difficultés est donnée par la supersymétrie, qui lie les masses des scalaires à celles des fermions, lesquelles sont protégées par des symétries chirales. On doit alors supposer que la brisure de la supersymétrie ne réintroduit pas de divergences quadratiques. On inclut donc tous les opérateurs correspondants. Les modèles supersymétriques sont donc également des théories effectives (découplantes). La recherche d'un modèle adapté de brisure de supersymétrie constitue un champ d'investigation important. Un point important est que l'échelle de la nouvelle physique au-delà des masses des super-partenaires des particules connues (c'est-à-dire au-delà du TeV) peut alors être rejetée à des énergies arbitrairement grandes. Mentionnons par ailleurs une alternative à la supersymétrie pour protéger la masse du boson de Higgs physique, mais que nous ne considérerons pas ici: les modèles dits *little Higgs* [AHCG01b, AHCKN02, AH<sup>+</sup>02].

Dans une autre direction, une idée ambitieuse a été proposée par Susskind [Wei79a, Sus79] et baptisée technicouleur, voir chapitre 1. Les trois GBs nécessaires pour donner les masses aux  $W^\pm$  et  $Z^0$  à travers le mécanisme de Higgs sont produits par une brisure de symétrie chirale analogue à celle qui a lieu en chromodynamique quantique (*quantum chromodynamics*, ou QCD). Le spectre ne contient alors pas de particule de Higgs. En effet, cette dernière n'est pas requise pour avoir une réalisation (non-linéaire) de la symétrie [CWZ69, CCWZ69]. L'échelle électrofaible est générée par le mécanisme de transmutation dimensionnelle, et il est tout à fait concevable que l'évolution logarithmique (donc lente) de la constante de couplage permette une séparation des échelles à partir d'un couplage de jauge raisonnable à haute énergie.

Afin d'obtenir des termes de masse satisfaisants pour les fermions, l'idée originale de Susskind doit en réalité être combinée à des interactions supplémentaires (technicouleur étendue [DS79]). La mise en place pratique d'un modèle réaliste suivant ces lignes est cependant malaisée: la dynamique d'interactions forte du secteur de brisure compromet l'utilisation des méthodes perturbatives habituelles (développement en puissances de constantes de couplage). En réalité, certains de ces modèles semblent exclus expérimentalement [PDG]. Nous étudierons d'autre part au chapitre 6 une contrainte théorique sur ces modèles, due à la présence d'anomalies empêchant l'élimination complète des GBs du spectre.

Parmi les approches de la physique au-delà du SM, celles qui consistent en des extensions du SM (supersymétrie et *little Higgs*) ont pour attrait et pour motivation la possibilité d'effectuer des calculs perturbatifs jusqu'à des échelles d'énergie élevées. Les autres modèles, y compris la technicouleur, proposent une solution plus radicale, qui est de se débarrasser du boson de Higgs. Le premier pas dans cette direction était celui de la limite de boson de Higgs lourd [AB80, Lon80, Lon81, NS00]. La construction de nouveaux modèles sans particule de Higgs, qui reste une activité

---

<sup>2</sup>. En particulier, le problème peut être mis en évidence comme suit: les corrections quantiques à la masse du boson de Higgs contiennent des divergences quadratiques impliquant l'échelle de la nouvelle physique.

vivante à ce jour [CGPT03, BPR03, CCGT04], et qui conduit à des prédictions à comparer aux expériences. C'est dans cette dernière étape que réside la difficulté majeure, étant donnés les obstacles au calcul explicite dans ces théories en interactions fortes.

- **Théories effectives à basse énergie**

Alternativement, on peut adopter le paradigme des théories effectives pour le cas non-découplant, telles qu'elles ont été initiées par Weinberg [Wei79c] dans le domaine de la QCD à basse énergie: on utilise le lagrangien effectif au-delà de la première approximation en arbres, calculant les corrections quantiques aux relations obtenues. Dans cette approche, qui porte le nom de Théorie de Perturbation Chirale (*Chiral Perturbation Theory*, ou  $\chi$ PT) [GL84, GL85], on renonce à faire des prédictions à partir d'un modèle, mais on utilise essentiellement les symétries de la théorie. La théorie effective à basse énergie (*low-energy effective theory*, ou LEET) est construite en incluant tous les opérateurs permis par les symétries et que l'on peut construire avec les degrés de liberté légers, au premier rang desquels on trouve les GBs.

Afin d'organiser de cette infinité d'opérateurs, on doit instaurer une règle de comptage de puissances. Ce comptage sera basé sur les puissances des impulsions, et éventuellement, d'autres paramètres appropriés (constantes de couplage de jauge). La relation cruciale montrant que la LEET fonctionne est la formule de comptage de Weinberg [Wei79c], qui donne la dimension chirale d'un graphe (l'ordre auquel ce graphe intervient dans le développement en puissances d'impulsions et de paramètres de brisure explicite de symétrie) en fonction de celle des vertex ainsi que du nombre de boucles. Le comptage de puissances pour les généralisations de la  $\chi$ PT incluant d'autres degrés de liberté protégés (champs de jauge, fermions chiraux) ou paramètres de brisure explicite (*via* des *spurions*: champs ne se propageant pas) est essentiellement fixé par la condition de reproduire une relation qui soit formellement la même.

En effet, la formule de comptage de Weinberg montre que le développement chirale correspond à un développement en boucles. Ainsi, pour une précision donnée, on doit calculer un nombre fini de graphes, dont les divergences sont absorbées par un nombre fini de constantes de couplages. La théorie est renormalisable ordre par ordre, bien que le nombre d'opérateurs et de constantes de couplage augmente avec la précision demandée.

Dans la construction d'une telle théorie effective, seuls les degrés de liberté légers interviennent. Le terme « léger » mérite une qualification précise: pour que les degrés de liberté appartiennent effectivement au secteur de basse énergie en dépit des corrections radiatives, leurs masses doivent être protégées par une symétrie. Les possibilités connues pour protéger les masses des particules sont les suivantes: i) pour les fermions, une symétrie chirale ou bien la participation au raccordement des anomalies (*anomaly-matching*) [tH79a] entre la théorie effective à basse énergie et la théorie fondamentale, ii) pour les bosons vecteurs, la symétrie de jauge locale, iii) pour des scalaires, la réalisation de Nambu-Goldstone d'une symétrie globale ou bien la supersymétrie, qui nous ramène d'une certaine façon au cas i) car elle implique également les fermions chiraux.

Cette courte liste est à l'origine du choix suivant: si l'on souhaite construire une théorie effective à basse énergie pour la brisure électrofaible, les bosons vecteurs doivent être introduits en tant que champs de jauge [Geo90, BL93, Wud94]<sup>3</sup>. Concernant les fermions, on voit que la théorie de jauge aura naturellement une structure chirale puisque les couplages des deux chiralités d'un même fermion sont différents. Notons cependant que, contrairement au cas du SM, l'universalité des couplages fermions-bosons vecteurs n'est plus automatique lorsque l'on considère la brisure électrofaible résultant d'un secteur en interactions fortes. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 5.

En ce qui concerne les scalaires, qui posaient déjà problème dans le cadre des théories renormalisables, on observe que la théorie effective peut s'accommoder d'un type de scalaires particuliers: les GBs. Si l'on cherche une alternative à la supersymétrie, ceux-ci sont les seuls scalaires permis par notre liste de degrés de liberté légers.

- **Applications à l'EWSB sans particule de Higgs**

Dans le secteur électrofaible, on se trouve confronté à la difficulté suivante: en plus des trois GBs nécessaires pour donner leurs masses aux  $W^\pm$  et  $Z^0$ , le SM contient un scalaire non protégé: la particule de Higgs physique. Les théories sans particule de Higgs supposent l'absence de cette

<sup>3</sup>. Il est remarquable que cette conclusion soit la même que pour les théories renormalisables, bien que les raisons en soient différentes [tH79b].



dernière, résolvant la difficulté de façon radicale. Le spectre minimal est obtenu en supposant que les seules particules légères sont celles connues à ce jour (trois générations de quarks et leptons, les gluons, les  $W^\pm$  et  $Z^0$  ainsi que le photon, mais pas de boson de Higgs physique). Les seuls états liés légers produits par le secteur de brisure sont alors les trois GBs, qui disparaissent du spectre suite au mécanisme de Higgs, donnant leurs masses aux  $W^\pm$  et  $Z^0$ . Les autres degrés de libertés introduits dans la LEET sont en revanche fondamentaux: ils ne présentent pas de sous-structure à l'échelle de quelques TeV. Supposer l'existence d'autres particules légères (scalaires, vecteurs ou encore fermions composites résultant de la dynamique forte du secteur de brisure) impliquerait de considérer une théorie effective différente dans laquelle le secteur d'interactions fortes produit d'autres états liés légers, ce que nous ferons brièvement au chapitre 6. Dans des cas non-minimaux, on peut inclure des résonances vectorielles ou bien des bosons pseudo-Goldstone (*pseudo-Goldstone bosons*, ou PGBs) [HS04b], ainsi que des fermions composite [HS04a]. Remarquons que la prise en compte de PGBs permettrait également de traiter les modèles de déconstruction dimensionnelle et *little Higgs* dans le cadre des théories effectives [KNP04], ce que nous ne ferons pas ici.

Les états plus lourds, qui ne sont pas protégés par des symétries, ne sont pas inclus dans la théorie effective. Celle-ci perd donc de son utilité à des énergies de l'ordre des masses de ces résonances (à moins que l'on parvienne à inclure les résonances les plus légères dans la théorie effective). Une estimation de l'échelle à laquelle le développement devient inapproprié est fournie par des considérations concernant la renormalisation des constantes à l'ordre sous-dominant [Geo84], dans le cadre de la LEET elle-même. On trouve dans le cas de la  $\chi$ PT,  $\Lambda \sim 4\pi f_0$ , où  $f_0$  est la constante de désintégration des pions. Dans les applications au secteur électrofaible, ceci fournit une première estimation, avec  $f \simeq 246$  GeV ( $f$  correspond au  $v$  du SM: la valeur moyenne dans le vide du champ de Higgs), donnant une limitation à l'applicabilité de la LEET correspondante de  $\Lambda \sim 3$  TeV. Au-dessous de cette échelle, la théorie effective constitue une méthode systématique pour construire une théorie où l'unitarité est approchée ordre par ordre dans le développement, satisfaisant comme toute théorie des champs aux contraintes de croisement et d'analyticité. La procédure à suivre pour le développement est basée sur celle mise en place pour étudier les conséquences de la QCD à basse énergie.

Différents modèles sous-jacents possédant les mêmes symétries vont se distinguer par les valeurs des constantes de basse énergie (*low-energy constants* ou LECs) apparaissant en facteur des opérateurs dans le lagrangien effectif. Ce fait est illustré par la distinction entre la limite de masse lourde du modèle sigma linéaire et le lagrangien effectif pour la QCD à basse énergie, où ces différences apparaissent au premier ordre sous-dominant [GL84]. De même, les prédictions pour les valeurs des LECs dans deux modèles particulier pour l'EWSB ne nous renseigne pas sur les autres modèles: la limite de Higgs lourd [NS00] et la technicouleur (voir annexe C) ne prédisent que deux jeux particuliers de valeurs pour les LECs. En dehors des valeurs numériques des LECs, la LEET permet uniquement de distinguer les modèles en fonction de leurs symétries.

On peut par exemple exclure certaines classes de théories qui donneraient à l'ordre dominant des termes supplémentaires par rapport au SM, comme nous le verrons au chapitre 5. À moins d'un « réglage fin » (*fine-tuning*) des constantes de couplage de la théorie effective, les « déviations du SM » seraient immédiatement observables expérimentalement. Un tel réglage fin peut se comprendre s'il correspond à un accroissement de la symétrie [tH79a]: il est alors maintenu au cours de la procédure de renormalisation<sup>4</sup>. L'idée est d'imposer cette symétrie à la théorie effective: autrement dit, on a pratiquement exclu tous les modèles qui ne posséderaient pas la symétrie en question d'une manière approchée, laquelle est précisée par le comptage de puissance. Un exemple connu est la symétrie custodiale [SSVZ80], que le secteur de brisure doit respecter dans la limite où la constante de couplage de l'hypercharge tend vers zéro. Nous verrons un autre exemple au chapitre 5, dont l'idée provient de la généralisation du principe que nous appliquons aux modèles *moose* [Geo86] au chapitre 4.

- Objectifs

D'après la discussion précédente, on peut voir que le cadre des LEETs, auquel nous avons recours pour discuter de l'EWSB sans particule de Higgs, ne permet pas de faire des prédictions quantitatives *a priori*, puisqu'il recouvre en réalité tout un ensemble de théories. Il permet en revanche

---

4. Dans le SM, une telle propriété, qui protégerait la masse du boson de Higgs physique, est justement absente.

de paramétrer efficacement notre connaissance (et notre ignorance) des modèles, lorsque le spectre physique présente une différence de masse (*mass-gap*) entre les degrés de liberté protégés et les autres. A plus long terme, le programme des théories effectives consiste à fixer expérimentalement la valeur des constantes de couplages apparaissant en facteur des opérateurs dans la LEET à partir de certaines observables, et afin d'en prédire d'autres. Ceci dépasse le cadre de cette thèse, dont le but est la recherche de règles permettant un développement à la fois cohérent théoriquement et viable phénoménologiquement pour ces théories effectives sans particule de Higgs.

Le point de départ est la remarque que la construction de la LEET rencontre des difficultés, lesquels se résument essentiellement à la présence, à l'ordre dominant dans le développement chirale, d'opérateurs qui étaient *irrelevant*s à basse énergie dans le SM. En revanche, la discussion n'apportera pas d'argument supplémentaire pour ou contre l'existence d'une particule de Higgs physique. En effet, la question que nous nous posons ici intervient à un niveau plus basique, avant même de considérer une comparaison quantitative avec l'expérience: peut-on décrire l'EWSB sans particule de Higgs dans le cadre des LEETs? Nous montrons que l'on peut répondre par l'affirmative. La réponse comporte en réalité deux aspects: l'un théorique et l'autre qualitatif.

Le premier aspect théorique concerne la viabilité même du développement: nous cherchons à préciser les règles de construction qui doivent être respectées dans les applications des théories effectives au-delà de la  $\chi$ PT, en particulier lorsque la symétrie n'est pas réalisée selon le mode de Nambu-Goldstone, mais selon le mode de Higgs. Un autre aspect théorique concerne les anomalies, qui peuvent constituer une entrave au mécanisme de Higgs, empêchant l'élimination des GBs du spectre.

Les règles de comptage nécessitent également d'être clarifiées pour ce qui concerne la prise en compte des fermions et de la brisure de l'isospin faible. Dans ce cas, on constate que des difficultés phénoménologiques qualitatives surviennent dès l'ordre dominant: les interactions permises à ce niveau par la LEET donneraient des corrections trop importantes aux relations valables dans le SM pour espérer raisonnablement décrire les expériences connues. La solution à ce volet qualitatif de notre question nécessite de reconsidérer la manière dont est introduit le couplage entre GBs et champs de jauge.

Revenant à la question de l'existence de la particule de Higgs, précisons que les restrictions ainsi posées sur la construction de la LEET impliquent que l'on sélectionne un sous-ensemble de modèles possibles. Dans ce cas, les tests de précision électrofaibles (*electroweak precision tests* ou EWPTs) permettront à nouveau d'exclure certains modèles en fonction de la valeur des LECs qu'ils prédisent. Une question est alors de savoir si l'ensemble de théories décrites par la LEET possédant ces propriétés est vide ou non. Nous ne savons pas comment répondre à cette question.

## Plan de l'exposé

Le manuscrit est organisé comme suit. Le chapitre 1 présente une revue de quelques aspects du SM qui sont pertinents pour guider la construction de théories alternatives. Quelques idées générales sur les théories alternatives sont présentées au travers d'exemples. Il s'agit d'explicitier en quoi les succès du SM sont non-triviaux. L'idée sous-jacente est que toute théorie alternative pour l'EWSB devra en première approximation (c'est-à-dire à l'ordre dominant du développement approprié) présenter les mêmes interactions que le SM concernant des aspects expérimentalement établis. Le chapitre 1 est donc axé sur ces sujets, ainsi que sur les masses des neutrinos, dont de simples extensions du SM permettent de justifier la faible valeur.

Dans cette thèse, nous ne considérons pas de modèles explicites, mais abordons ces questions dans le cadre général des théories effectives sans particule de Higgs. Il se trouve que ces contraintes phénoménologiques ne sont pas anodines, et demandent la mise en place d'un formalisme nouveau en plus du cadre des LEETs. Précisément, nous verrons qu'il sera nécessaire d'introduire de nouveaux paramètres de développement sous la forme de spurions correspondant au couplage du secteur de brisure (composite) et du secteur de jauge (élémentaire).

Avant de nous embarquer dans ce formalisme, il est nécessaire de décrire explicitement la procédure à suivre pour construire une LEET, ce que nous faisons au chapitre 2. Pour introduire la méthode, nous décrivons les aspects essentiels de la  $\chi$ PT et du développement correspondant: le comptage de puissances pour ordonner l'infinité d'opérateurs permis par les symétries et la renormalisation ordre par ordre pour obtenir des résultats finis à une précision donnée. La colonne vertébrale sur laquelle repose le développement est la formule de comptage de Weinberg donnant la dimension chirale d'un diagramme en fonction des vertex qui le composent et du nombre de boucles. Pour formuler une théorie effective applicable à des degrés de libertés de spin 1/2 et 1, un comptage de puissances doit être imposé de manière à obtenir une formule de comptage analogue, mais qui tienne compte de la propagation de ces nouveaux degrés de liberté.

Le chapitre 3 constitue une première application de ces idées, se limitant au cas le plus simple d'une théorie de jauge non-abélienne sujette au mécanisme de Higgs, sans particule de Higgs physique. Nous considérons la brisure dynamique d'une symétrie de jauge  $SU(2)$  par ses interactions avec trois champs (composites) scalaires: les GBs <sup>5</sup>. Ce cas correspond au secteur électrofaible dans la limite où la constante de couplage  $U(1)_Y$  est prise égale à zéro (angle de Weinberg nul), en omettant les fermions. L'absence de Higgs physique permet l'utilisation de redéfinitions des champs non-singulières, menant à une formulation en termes de variables invariantes de jauge. On montre que tous les calculs à une boucle donneront des résultats finis, une fois fixées les renormalisations des constantes  $\mathcal{O}(p^4)$  obtenues par la méthode du noyau de la chaleur adaptée au cas d'une théorie de Yang-Mills massive.

L'application à une théorie de jauge  $SU(2) \times U(1)$  serait en principe le pas suivant, puis l'inclusion des fermions. Cependant, on observerait rapidement que les symétries de la théorie effective permettent des termes qui ne sont pas observés, correspondant à des opérateurs *irrelevant*s dans le cas du SM. Ceci ne pose pas de problème pour le développement systématique, mais serait en revanche difficile à réconcilier avec l'expérience, d'après la discussion du chapitre 1. La suppression de ces termes indésirables nécessite une justification plus générale, et si possible unique, plutôt que le traitement au cas par cas, qui traduit une compréhension incomplète.

Remarquons qu'une difficulté similaire survient lorsque l'on cherche à inclure en  $\chi$ PT les résonances les plus légères, afin d'étendre le domaine d'applicabilité de la LEET. Introduisant les champs vectoriels correspondants en tant que champs de jauge, on trouve que les termes permis par les symétries de la LEET sont en trop grand nombre pour reproduire un résultat physique [Mei88, EGL<sup>+</sup>89]: les règles de somme de Weinberg (*Weinberg sum rules* ou WSRs) [Wei67b]. Ces règles de somme reposent sur les propriétés à haute énergie de la QCD, et non pas sur la symétrie chirale elle-même, c'est pourquoi elles doivent être imposées en plus à la théorie effective.

Partant d'une discussion récente de ces règles de Weinberg dans le contexte des modèles *moose* [SS03], le chapitre 4 propose une approche basée sur les symétries pour construire la théorie effective correspondante, traitant les premières résonances comme des champs dynamiques. Celle-ci produit automatiquement les deux WSRs, ainsi que leurs généralisations, à l'ordre dominant. Les corrections à ces règles sont calculables dans un développement en puissance de spurions (sur lesquels on impose des contraintes), introduits pour coupler les champs de jauge et de Goldstone le long du *moose*. Le formalisme est exposé et ses conséquences sont étudiées en détails.

Après ce détour dans le domaine des *mooses* et des théories effectives de la QCD, nous reprenons le fil du manuscrit au chapitre 5, appliquant la même méthode d'introduction des couplages entre GBs et champs de jauge au secteur électrofaible. Le cas particulier où les spurions sont absents correspond à la situation suivante: les deux secteurs, composite et élémentaire, sont découplés, ce qui confère à la théorie une symétrie plus grande. Les contraintes appliquées sur les spurions ont pour effet de réduire cette symétrie à celle observée dans la nature  $SU(2) \times U(1)$ . En outre, nous considérons les spurions comme paramètres de développement. Le chapitre 5 montre quelles sont les conséquences pour le lagrangien effectif à l'ordre dominant d'une théorie sans particule de Higgs obéissant à ce principe. Les opérateurs indésirables qui étaient *irrelevant*s à basse énergie dans le SM mais apparaissaient à l'ordre dominant dans la LEET sans spurions sont maintenant relégués aux ordres suivants du développement spurionique.

---

5. Par brisure de symétrie « dynamique », on entend généralement le fait les GBs associés sont composites et non élémentaires [Wei79a].

Finalement, le chapitre 6 s'intéresse à une autre question qualitative qui doit encore être abordée avant l'étude quantitative des boucles et les comparaisons à l'expérience. On étudie les changements de variables définissant la jauge unitaire, afin de vérifier si les modes de Goldstone sont effectivement éliminés du spectre. Ceci nécessite que les symétries globales de la techni-théorie agissant sur les variables de basse énergie soient dépourvues d'anomalies. On trouve par ailleurs que la somme des charges  $B - L$  pour les fermions élémentaires doit être égale à zéro: ce résultat découle ici du fait que les GBs doivent disparaître du spectre, et non pas du principe de renormalisabilité comme ce serait le cas dans le SM.



# Chapitre 1

## Mécanisme de Higgs dans le Modèle Standard

Nous donnons ici une présentation théorique du SM, par opposition à une présentation historique, l'objectif étant de mettre en valeur les principes fondamentaux qui sous-tendent le modèle. L'interprétation de ces derniers a évolué depuis l'invention du SM [Wei67a]: le paradigme dans lequel le SM est actuellement interprété est celui des théories effectives [Wei96]. Le SM est un exemple de théorie effective du type découplant, puisque le lagrangien composé des opérateurs de dimension quatre ou inférieure est renormalisable. La propriété de renormalisabilité garantit la suppression à basse énergie des effets dus à la nouvelle physique.

Parmi les nombreuses références utiles, certaines apportent un éclairage nouveau sur le sujet [Jeg91, Hab91, DGH92, Hoř94, Hoř97].

En plus de présenter des rappels sur le SM, le but est ici d'introduire des notations utiles pour la suite, qui ne sont pas celles utilisées habituellement. Nous discutons également certains opérateurs effectifs particulièrement sensibles au mécanisme de brisure de la symétrie électrofaible, et qui joueront un rôle important dans la suite. Nous motivons également les approches au-delà du SM.

### 1.1 Architecture du SM

Les constituants élémentaires de la matière sont des champs fermioniques de spin 1/2. Bien que tous les fermions connus possèdent une masse (y compris les neutrinos en l'état actuel de nos connaissances), la description théorique procède avec des champs sans masse, et donc des fermions de chiralité bien définie. L'introduction des masses physiques observées de ces fermions sera une des conséquences du mécanisme de Higgs élémentaire.

#### 1.1.1 Champs de matière

Nous utiliserons la notation usuelle pour le SM, qui consiste à utiliser les projections de chiralité définie d'un spineur de Dirac à quatre composantes complexes <sup>1</sup>, et renvoyons le lecteur à l'annexe A pour une explication détaillée des relations entre les différentes notations. Pour chacune des trois générations connues, les champs sont les suivants

$$\nu_L, e_L, e_R, u_L^r, u_L^g, u_L^b, d_L^r, d_L^g, d_L^b, u_R^r, u_R^g, u_R^b, d_R^r, d_R^g, d_R^b, \quad (1.1)$$

où nous avons indiqué la charge de couleur  $r, g, b$  en exposant pour les quarks. Puisque nous nous intéresserons essentiellement ici aux interactions électrofaibles, que nous allons introduire plus bas, et non aux interactions fortes, cet exposant n'interviendra plus par la suite, l'effet principal de notre point de vue étant le facteur trois dans le comptage des degrés de liberté. Lorsque cela sera nécessaire, nous introduirons également des indices romains du milieu de l'alphabet pour dénoter les générations:  $i, j = 1, 2, 3$ . Notons qu'à ce stade, le neutrino  $\nu_L$  n'a pas de partenaire de chiralité opposée: il n'y a qu'un spineur de Weyl par famille pour décrire les neutrinos dans le SM, et donc chaque génération comporte 15 champs chiraux <sup>2</sup>. Le lagrangien libre pour ces champs est la somme des termes cinétiques, puisque ces fermions ne possèdent pas de masse à ce stade

$$\mathcal{L}_{\text{fermions libres}} = i \sum_{a=1}^{45} \bar{\psi}_a \gamma^\mu \partial_\mu \psi_a. \quad (1.2)$$

1. Chaque projection compte donc deux composantes complexes.

2. Nous considérerons des modifications mineures du SM qui introduisent un deuxième spineur de Weyl de chiralité droite  $\nu_R$  pour les neutrinos.

Nous avons indexé par  $a$  l'ensemble des projections chirales pour les trois générations, les 45 spineurs de Weyl étant collectés dans un vecteur

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{45} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Le lagrangien libre (1.2) possède une symétrie globale  $G_{\text{fermions libres}} = \text{U}(45)$ . Les interactions entre fermions sont régies par le principe suivant, qui permet de construire des termes d'interactions tout en ayant une théorie renormalisable (en se limitant aux opérateurs de dimension quatre ou inférieure): un sous groupe  $G_{\text{local}} = \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1) \subset G_{\text{fermions libres}}$  est promu en une symétrie locale dynamique de la théorie. Lorsque l'on applique une transformation  $U(x) \in G_{\text{local}}$

$$\psi(x) \mapsto U(x) \psi(x), \quad (1.4)$$

le lagrangien doit alors être invariant. Ce n'est pas le cas du lagrangien  $\mathcal{L}_{\text{fermions libres}}$ . On introduit donc des champs vectoriels qui se transforment également sous cette symétrie locale, de façon à compenser la variation de la dérivée appliquée aux champs fermioniques. Les champs de jauge correspondants interviennent dans la dérivée covariante, qui remplace la dérivée simple

$$\partial_\mu \psi \rightarrow D_\mu \psi = \left( \partial_\mu - i \sum_{r=1}^3 g_r \sum_{n=1}^{n_r} T^{rn} V_\mu^{rn} \right) \psi, \quad (1.5)$$

où  $r = 1, 2, 3$  correspond respectivement aux différents facteurs  $\text{U}(1)$ ,  $\text{SU}(2)$  et  $\text{SU}(3)$  intervenant dans  $G_{\text{local}}$ , tandis que  $n_r = 1, 3, 8$  pour  $r = 1, 2, 3$  dénote le nombre de générateurs de chaque groupe unitaire, dénotés par  $T_{rn}$ : dans cette notation, ce sont des matrices  $45 \times 45$ . Les constantes de couplage  $g_r$  sont des nombres réels. On peut résumer les interactions des champs de matière avec les champs de jauge en termes des courants de symétrie

$$j_{rn}^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu T^{rn} \psi, \quad (1.6)$$

sous la forme

$$\mathcal{L}_{\text{interactions courants}} = \sum_{r=1}^3 g_r \sum_{n=1}^{n_r} j_{rn}^\mu V_\mu^{rn}. \quad (1.7)$$

### 1.1.2 Champs de jauge

A ce stade, il est plus utile d'abandonner l'écriture utilisant des matrices  $45 \times 45$  en faveur des notations usuelles. Introduisons tout d'abord les générateurs des groupes de jauge. Pour les interactions fortes, il s'agit des huit matrices de Gell-Mann  $\{\lambda^\alpha | \alpha = 1, \dots, 8\}$ , sur lesquelles on décompose les champs de gluons (champs de jauge de  $\text{SU}(3)_c$ )

$$\mathcal{G}_\mu = \mathcal{G}_\mu^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2}. \quad (1.8)$$

Le tenseur de Faraday correspondant (terme de courbure)

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{G}_\nu - \partial_\nu \mathcal{G}_\mu - i g_s [\mathcal{G}_\mu, \mathcal{G}_\nu], \quad (1.9)$$

nous permet de compléter le terme cinétique pour former un invariant

$$\mathcal{L}_{\text{cinétique } \mathcal{G}} = -\frac{1}{2} \langle \mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu} \rangle, \quad (1.10)$$

où a été utilisée la notation  $\langle \dots \rangle$  qui signifie la trace d'une matrice. En effet, si la transformation locale de  $\text{SU}(3)_c$  est notée  $G_c$ , c'est-à-dire si l'on considère l'application

$$\mathcal{G}_\mu \mapsto G_c \mathcal{G}_\mu G_c^\dagger + \frac{i}{g_s} G_c \partial_\mu G_c^\dagger, \quad (1.11)$$

qui va compenser la transformation des champs de matière dans la dérivée covariante, on peut voir que le tenseur de courbure (1.9) se transforme selon la représentation adjointe

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} \mapsto G_c \mathcal{G}_{\mu\nu} G_c^\dagger. \quad (1.12)$$

On peut de même décomposer les champs de jauge  $\text{SU}(2)_w$  sur la base des matrices de Pauli  $\{\tau^a | a = 1, 2, 3\}$

$$W_\mu = W_\mu^a \frac{\tau^a}{2}, \quad (1.13)$$

avec la loi de transformation sous  $G \in \text{SU}(2)_w$

$$W_\mu \mapsto G W_\mu G^\dagger + \frac{i}{g} G \partial_\mu G^\dagger. \quad (1.14)$$

Le champ de jauge  $\text{U}(1)_Y$  quant à lui, se transforme selon

$$b_\mu^0 \mapsto b_\mu^0 - \frac{1}{g'} \partial_\mu \alpha^0. \quad (1.15)$$

Les tenseurs de Faraday pour les champs de jauge électrofaibles sont donnés respectivement par

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - i g [W_\mu, W_\nu] \mapsto G W_{\mu\nu} G^\dagger, \quad (1.16)$$

et pour l'hypercharge

$$b_{\mu\nu}^0 = \partial_\mu b_\nu^0 - \partial_\nu b_\mu^0 \mapsto b_{\mu\nu}^0. \quad (1.17)$$

Le lagrangien de la théorie de Yang-Mills pure (c'est-à-dire comportant uniquement les champs de jauge) renormalisable est

$$\mathcal{L}_{\text{Yang-Mills}} = -\frac{1}{2} \langle \mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu} \rangle - \frac{1}{2} \langle W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \rangle - \frac{1}{4} b_{\mu\nu}^0 b^{0\mu\nu}, \quad (1.18)$$

la normalisation impliquant la définition des constantes de couplage  $g'$ ,  $g$  et  $g_s$ .

### 1.1.3 Couplages des fermions

Il nous faut à présent préciser les charges des fermions sous  $G_{\text{local}}$ . Il se trouve que le SM n'emploie que les représentations non-triviales de plus basses dimensionnalité de  $G_{\text{local}}$ .

Seuls les quarks sont sujets aux interactions fortes: ils constituent des triplets sous la symétrie de jauge  $\text{SU}(3)_c$ , les leptons étant des singlets de couleur. Pour ce qui est de la symétrie  $\text{SU}(2)$ , seuls les fermions de chiralité gauche se transforment, et uniquement suivant la représentation de dimension 2. Les doublets de  $\text{SU}(2)_w$  sont les suivants, pour chaque génération

$$\ell_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \text{ et } q_L \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Ceci signifie que les valeurs pour les nombre quantiques d'isospin faible  $T_w$ , ainsi que pour la troisième composante  $T_{w3}$  sont celles reproduites dans le tableau 1.1.

	$T_w$	$T_{w3}$
$\nu_L$	1/2	1/2
$e_L$	1/2	-1/2
$e_R$	0	0
$u_L$	1/2	1/2
$d_L$	1/2	-1/2
$u_R$	0	0
$d_R$	0	0

**Tableau 1.1.** Charges des fermions sous  $\text{SU}(2)_w$ .



Afin d'achever cette description explicite des générateurs introduits formellement en (1.5), nous devons à présent assigner leurs hypercharges aux deux doublets  $\ell_L$  et  $q_L$ , ainsi qu'aux trois singlets de  $SU(2)_w$

$$e_R, u_R, d_R, \quad (1.20)$$

soit cinq constantes. On peut fixer ces charges en utilisant la contrainte d'absence d'anomalies couplées au champs de jauge [BIM72, GJ72, KAP72, GG72], afin de préserver la propriété de renormalisabilité. Ceci impose les relations

$$2Y(q_L) - Y(u_R) - Y(d_R) = 0, \quad (1.21)$$

$$3Y(q_L) + Y(\ell_L) = 0, \quad (1.22)$$

$$3(2Y^3(q_L) - Y^3(u_R) - Y^3(d_R)) + 2Y^3(\ell_L) - Y^3(e_R) = 0. \quad (1.23)$$

En demandant à présent que la relation entre l'hypercharge et la troisième composante de l'isospin faible d'une part et la charge électrique d'autre part soit linéaire, et en fixant la normalisation de manière à ce que l'hypercharge de  $e_R$  soit égale à  $-2$  pour une charge électrique valant  $-1$ , on obtient

$$Q = T_w3 + \frac{Y}{2}. \quad (1.24)$$

Si l'on requiert de plus que le courant électrique ait uniquement une composante vectorielle et non axiale, on obtient les valeurs du tableau 1.2, où sont également reproduites les valeurs de la charge électrique déduites de la formule (1.24).

	$Y$	$Q$
$\nu_L$	-1	0
$e_L$	-1	-1
$e_R$	-2	-1
$u_L$	1/3	2/3
$d_L$	1/3	-1/3
$u_R$	4/3	2/3
$d_R$	-2/3	-1/3

**Tableau 1.2.** Hypercharges des fermions.

Notons encore que les transformations des fermions sous  $SU(2)_w \times U(1)_Y$  peuvent être résumées d'une autre façon, qui nous sera utile pour la suite (nous omettons à présent les interactions fortes). La même remarque est à l'origine du développement des modèles symétriques gauche-droit (*left-right symmetric models*) [SM75], que nous ne considérerons pas. On dénote de façon générale le doublet de chiralité gauche (fermions ou quarks) par  $\chi_L$  et l'on rassemble les composantes de chiralité droite en un vecteur à deux composantes  $\chi_R$ . On utilise les nombres baryonique ( $B$ ) et leptonique ( $L$ ), dont les valeurs sont les suivantes:  $B = 1/3$  pour les quarks, et  $B = 0$  pour les leptons;  $L = 1$  pour les leptons, et  $L = 0$  pour les quarks. Pour le cas des leptons ( $B = 0, L = 1$ ) on aura donc

$$\chi = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

et pour le cas des quarks ( $B = 1/3, L = 0$ )

$$\chi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

De façon générale, on notera

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_u \\ \chi_d \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Cette notation permet également de tenir compte d'un éventuel degré de liberté  $\nu_R$  comme extension minimale du SM. On écrit alors les transformations des projections chirales  $\chi_{L,R}$  sous  $SU(2)_w \times U(1)_Y$

$$\chi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \chi \mapsto G e^{-i \frac{B-L}{2} \alpha^0} \chi_L, \quad (1.28)$$

$$\chi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \chi \mapsto e^{-i \frac{\tau^3}{2} \alpha^0} e^{-i \frac{B-L}{2} \alpha^0} \chi_R. \quad (1.29)$$

Ceci nous donne une écriture explicite compacte pour les transformations décrites en (1.4). La dérivée covariante (1.5) est donnée par

$$D_\mu \chi = \left( \partial_\mu - i g' \left( \frac{\tau^3}{2} \frac{1 + \gamma_5}{2} + \frac{B-L}{2} \right) b_\mu - i g \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) W_\mu \right) \chi. \quad (1.30)$$

Ceci correspond à l'utilisation d'une écriture alternative équivalente à (1.24) pour l'expression des charges électriques des différents champs [Dav79, MM80]

$$Q = T_{w3} + T_{d3} + \frac{B-L}{2}, \quad (1.31)$$

où  $T_{d3}$  est la troisième composante de l'isospin droit. On peut écrire le lagrangien le plus général avec ces champs, et qui soit invariant sous  $SU(2)_w \times U(1)_Y$

$$\mathcal{L}_{\text{fermions}} = \sum_{f=1}^6 i \bar{\chi}_f \gamma^\mu D_\mu \chi_f, \quad (1.32)$$

où la somme sur  $f$  est une somme sur les trois générations et sur les doublets de quarks et leptons. On voit que les couplages des fermions aux bosons vecteurs sont introduits uniquement à travers la dérivée covariante, et sont donc tous fixés par la constante de couplage  $g$ , indépendamment du fermion et de la génération: ceci constitue l'universalité des couplages. Cette remarque ne s'applique pas aux couplages du champ abélien, où interviennent des constantes arbitraires  $(B-L)$ . À la section 1.6.2, nous introduirons des opérateurs *irrelevant*s à basse énergie, qui apporteront des corrections à cette universalité de la charge.

## 1.2 Interactions

Dans cette section, nous explicitons la forme des interactions des champs vectoriels entre eux et avec les courants fermioniques, dans la base des champs vectoriels physiques.

### 1.2.1 Structure des courants fermioniques

À ce stade, le modèle n'est pas phénoménologiquement viable: les fermions n'ont toujours pas de masse et les bosons vecteurs non plus. Néanmoins, on peut étudier les interactions fermions-bosons vecteurs dès à présent, le seul ingrédient nécessaire étant de reconnaître les différents champs physiques parmi les bosons vecteurs, remettant à plus tard la description des masses.

#### 1.2.1.1 Champs physiques pour les bosons vecteurs

Nous savons que le photon est couplé aux fermions par la charge électrique  $Q$ . Nous cherchons les états propres de  $Q$  parmi les champs vectoriels. Les champs  $W_\mu^a$  ont une hypercharge nulle et donc  $Q = T_{w3}$ . On observe que les combinaisons

$$\tau^\pm = \frac{\tau^1 \pm i \tau^2}{2}. \quad (1.33)$$

correspondent aux états propres de charge, puisque l'on a (les champs  $W_\mu$  sont dans la représentation adjointe)

$$\left[ \frac{\tau^3}{2}, \tau^\pm \right] = \pm \tau^\pm. \quad (1.34)$$

Les champs correspondants définis par

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp i W_\mu^2), \quad (1.35)$$

ont donc une charge électrique bien définie, respectivement  $\pm 1$ . On a effectivement

$$W_\mu = W_\mu^3 \frac{\tau^3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ \tau^+ + W_\mu^- \tau^-). \quad (1.36)$$

On sait d'autre part que, dans la théorie complète incluant les masses des bosons vecteurs, seule la symétrie  $U(1)_Q$  associée à la charge électrique sera visible. Or, les deux champs vectoriels  $W_\mu^3$  et  $b_\mu^0$  ne sont pas électriquement chargés ( $Y=0$  et  $T_{w3}=0$ ) et peuvent donc se mélanger. On dénote par  $Z_\mu$  la combinaison linéaire qui couple au neutrino  $\nu_L$ , et par  $A_\mu$  la combinaison orthogonale, qui couple à  $Q$ , et est donc le photon

$$A_\mu = \cos \theta b_\mu^0 + \sin \theta W_\mu^3, \quad (1.37)$$

$$Z_\mu = -\sin \theta b_\mu^0 + \cos \theta W_\mu^3. \quad (1.38)$$

L'angle de Weinberg  $\theta$  est donné par les relation

$$\tan \theta = \frac{g'}{g}. \quad (1.39)$$

On utilisera par la suite les notations

$$c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta. \quad (1.40)$$

Dans cette nouvelle base, les termes quadratiques sont encore diagonaux et normalisés.

### 1.2.1.2 Interactions fermions-vecteurs

Nous pouvons à présent expliciter la structure des interactions, c'est-à-dire l'équation (1.7)

$$\mathcal{L}_{\text{interactions courants}} = e J_Q^\mu A_\mu + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e}{s} \left( J_{CC}^{\mu-} W_\mu^+ + J_{CC}^{\mu+} W_\mu^- \right) + \frac{e}{cs} J_{NC}^\mu Z_\mu. \quad (1.41)$$

Dans cette équation, on a introduit la charge électrique  $e$  qui apparaît en facteur devant les interactions du photon

$$e \equiv \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = gs. \quad (1.42)$$

On définira également la constante de structure fine

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (1.43)$$

D'autre part, on donne les expressions des courants extraits de (1.32), ce qui fournit une forme explicite correspondant à l'équation formelle (1.6)

$$J_Q^\mu = \sum_{f=1}^6 \bar{\chi}_f \gamma^\mu Q \chi_f, \quad (1.44)$$

$$J_{CC}^{\mu\pm} = \sum_{f=1}^6 \bar{\chi}_f \gamma^\mu \tau^\mp \left( \frac{1-\gamma^5}{2} \right) \chi_f, \quad (1.45)$$

$$J_{NC}^\mu = \sum_{f=1}^6 \bar{\chi}_f \gamma^\mu \left( \frac{\tau^3}{2} \frac{(1-\gamma^5)}{2} - s^2 Q \right) \chi_f. \quad (1.46)$$

La dernière de ces équations est souvent écrite sous la forme alternative

$$J_{NC}^\mu = \sum_{f=1}^6 \bar{\chi}_f \gamma^\mu \left( \frac{g_v^f - g_a^f \gamma^5}{2} \right) \chi_f, \quad (1.47)$$

avec dans ce cas

$$g_v^f = \frac{\tau^3}{2} - 2 Q s^2, \quad (1.48)$$

$$g_a^f = \frac{\tau^3}{2}. \quad (1.49)$$

Explicitement, on obtient le courant électromagnétique sous la forme voulue, impliquant une sommation sur les trois générations de termes vectoriels

$$J_Q^\mu = \sum_{i=1}^3 \left( -\bar{e}_i \gamma^\mu e_i + \frac{2}{3} \bar{u}_i \gamma^\mu u_i - \frac{1}{3} \bar{d}_i \gamma^\mu d_i \right). \quad (1.50)$$

Les courants chargés impliquent uniquement les chiralités gauches des fermions: ils génèrent des transitions entre les deux composantes des doublets

$$J_{CC}^{\mu-} = \sum_{i=1}^3 (\bar{\nu}_{Li} \gamma^\mu e_{Li} + \bar{u}_{Li} \gamma^\mu d_{Li}). \quad (1.51)$$

Les courants neutres impliquent quant à eux les deux chiralités de chaque fermion, mais avec des couplages distincts

$$\begin{aligned} J_{NC}^\mu = & \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{2} \bar{\nu}_{Li} \gamma^\mu \nu_{Li} + \left( -\frac{1}{2} + s^2 \right) \bar{e}_{Li} \gamma^\mu e_{Li} + s^2 \bar{e}_{Ri} \gamma^\mu e_{Ri} \right. \\ & + \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} s^2 \right) \bar{u}_{Li} \gamma^\mu u_{Li} - \frac{2}{3} s^2 \bar{u}_{Ri} \gamma^\mu u_{Ri} \\ & \left. + \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} s^2 \right) \bar{d}_{Li} \gamma^\mu d_{Li} + \frac{1}{3} s^2 \bar{d}_{Ri} \gamma^\mu d_{Ri} \right). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Notons qu'à ce stade, aucun de ces courants n'engendre de transitions entre les générations. Cette possibilité s'introduira pour les courants chargés lorsque l'on considérera les masses des fermions, et sera discutée à la section 1.4.2.

### 1.2.2 Interactions entre bosons vecteurs

La structure de Yang-Mills donnée en (1.18) implique, à travers la diagonalisation (1.37-1.38) des interactions bien définies. Les tests expérimentaux de ces interactions ne sont pas encore très précis [LEP], mais confirment déjà la structure non-abélienne, responsable de ces interactions. On peut réécrire le lagrangien de Yang-Mills dans la base des champs physiques  $(W_\mu^+, W_\mu^-, Z_\mu, A_\mu)$

$$\mathcal{L}_{\text{Yang-Mills}} = -\frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{3V} + \mathcal{L}_{4V}, \quad (1.53)$$

où nous avons utilisé la notation standard pour les champs physiques

$$X_{\mu\nu} = \partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu. \quad (1.54)$$

Les interactions trinéaires sont données par

$$\mathcal{L}_{3V} = i g (W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu} W^{3\nu} + W_{\mu\nu}^- W^{3\mu} W^{+\nu} + W_{\mu\nu}^3 W^{+\mu} W^{-\nu}), \quad (1.55)$$

où nous avons réintroduit la troisième composante du champ  $W_\mu^a$

$$W_\mu^3 = c Z_\mu + s A_\mu. \quad (1.56)$$

Celle-ci est la seule combinaison du  $Z^0$  et du photon qui possède des couplages avec les autres champs vecteurs, le champ  $b_\mu^0$  correspondant à une symétrie abélienne. Notons que, du fait de l'antisymétrie des constantes de structure du groupe SU(2), (1.55) ne contient pas de couplages entre trois bosons neutres. Les couplages quartiques s'écrivent

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4V} = & -g^2 \left( \frac{1}{2} (W^+ \cdot W^-)^2 - \frac{1}{2} (W^+)^2 (W^-)^2 \right. \\ & \left. + (W^+ \cdot W^-) (W^3)^2 - (W^+ \cdot W^3) (W^- \cdot W^3) \right). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Ces termes ne contiennent pas d'interactions à quatre bosons neutres. Par ailleurs, le lagrangien ne contient pas d'interactions à cinq bosons vecteurs ou plus: puisque l'on souhaite obtenir une théorie renormalisable, on s'est volontairement limité aux termes de dimension physique inférieure ou égale à quatre.

Jusqu'à présent, nous n'avons discuté que les interactions des fermions et des champs de jauge, tous sans masse. Pour introduire les masses, le SM utilise le mécanisme de Higgs, que nous présentons maintenant.

## 1.3 Mécanisme de Higgs dans le SM

Les expériences qui ont permis de déterminer la structure des interactions décrite ci-dessus dans un modèle renormalisable basé sur une symétrie de jauge  $SU(2)_w \times U(1)_Y$  montrent également que ce modèle n'est pas suffisant: toutes les particules introduites jusqu'à présent, hormis le photon, ont une masse <sup>3</sup>.

Il est donc clair que la symétrie de jauge  $SU(2)_w \times U(1)_Y$  est brisée, c'est-à-dire qu'elle n'est pas réalisée de la manière que nous avons décrite ci-dessus. En effet, pour rendre compte des masses, il serait nécessaire d'ajouter les termes suivants au lagrangien

$$\mathcal{L}_{\text{masses}} = \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu + M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} - \sum_{f=1}^6 \bar{\chi} \begin{pmatrix} m_f^u & 0 \\ 0 & m_f^d \end{pmatrix} \chi. \quad (1.58)$$

La difficulté est qu'un tel terme de masse n'est pas invariant sous la symétrie de jauge  $SU(2)_w \times U(1)_Y$  sur laquelle a été basée la construction jusqu'à présent. A défaut de trouver une extension du terme de masse (1.58) pour le rendre invariant, en introduisant éventuellement de nouvelles particules, le principe de construction serait totalement remis en cause.

Il se trouve qu'une telle extension est effectivement possible en utilisant le mécanisme de Higgs, qui introduit des champs scalaires. Parmi ces champs scalaires doivent se trouver trois bosons de Goldstone, afin de donner une masse aux  $W^\pm$  et au  $Z^0$ , comme nous l'expliquons ci-dessous. Ces particules doivent se transformer sous  $SU(2)_w \times U(1)_Y$  puisqu'elles doivent briser cette symétrie. L'extension minimale *satisfaisant au critère de renormalisabilité* nécessite de plus l'introduction d'une quatrième particule scalaire, ne possédant aucune charge sous les symétries de jauge, mais dont les couplages aux autres particules sont fixés par la contrainte de renormalisabilité: le boson de Higgs.

### 1.3.1 Interactions entre champs de jauge et scalaires sans masses

Les termes de masses pour les bosons de jauge, s'ils sont directement introduits dans le lagrangien, violent l'invariance de jauge que nous avons supposée. Cependant, il n'est pas vrai que l'invariance de jauge interdit aux champs vecteurs correspondants d'acquies des masses. Cette masse peut en effet être générée par les interactions d'un champ de jauge avec une particule scalaire elle-même sans masse, qui disparaît du spectre au profit de la composante longitudinale du boson vecteur: le décompte des degrés de liberté est donc correct. On peut rapidement se convaincre de ceci à l'aide du court exemple décrit ci-dessous.

On considère un champ de jauge  $A_\mu$  couplé à un courant  $j_\mu$  par le terme suivant dans le lagrangien

$$\frac{g}{2} j^\mu A_\mu, \quad (1.59)$$

---

3. Les neutrinos semblent bien avoir des masses, bien que ces dernières soient très faibles comparées à celles des leptons chargés.

où le courant correspond à un générateur de symétrie qui ne laisse pas le vide invariant, mais produit donc une particule scalaire  $\pi$  sans masse, avec d'après le théorème de Goldstone

$$\langle 0 | j_\mu(0) | \pi(p) \rangle = i f_\pi p_\mu. \quad (1.60)$$

La constante de proportionnalité apparaissant ci-dessus est la constante de désintégration du scalaire. Elle a la dimension d'une masse

$$[f_\pi] = +1. \quad (1.61)$$

On voit que l'échange d'un GB va donner une contribution à la fonction à deux points du courant  $j_\mu$  où apparaîtra un terme de la forme  $g^2 f_\pi^2 p_\mu p_\nu / p^2$ . Le courant étant conservé, les identités de Ward garantissent la transversité de la fonction à deux points, qui prendra donc la forme suivante pour  $p^2$  petit

$$i \int dx e^{ip \cdot x} \langle 0 | T j_\mu(x) j_\nu(0) | 0 \rangle \underset{p^2 \rightarrow 0}{\sim} \frac{g^2}{4} f_\pi^2 \left( \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - \eta_{\mu\nu} \right). \quad (1.62)$$

Ceci entraîne une contribution à la partie transverse du propagateur du champ  $A_\mu$ , qui devient après resommation

$$G_{\mu\nu}^T(p) = -i \frac{\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}}{p^2 (1 + \Pi(p^2))}, \quad (1.63)$$

où la nouveauté est que l'énergie propre (*self-energy*) intervenant au dénominateur possède d'après (1.62) un pôle en  $p^2=0$ , correspondant à l'échange du scalaire de masse nulle [JJ73, Wei73c, CN73]

$$\Pi(p^2) \underset{p^2 \rightarrow 0}{\sim} -\frac{g^2}{4} \frac{f_\pi^2}{p^2}. \quad (1.64)$$

Ceci indique que le champ vectoriel acquiert une masse

$$M^2 = \frac{g^2}{4} f_\pi^2, \quad (1.65)$$

ce qui se vérifie explicitement lorsque l'on étudie le propagateur dans son intégralité. En réalité, il est encore plus simple de lire le résultat en jauge unitaire, auquel cas le terme de masse est visible au niveau du lagrangien. C'est ce que nous ferons dans la suite dans le cas du SM: comme nous ne décrivons pas de calculs en boucles, l'utilisation de la jauge unitaire n'est pas une complication, mais bien une simplification. Nous décrivons la brisure de symétrie dans le SM de cette façon dans la section 1.3.3 <sup>4</sup>.

### 1.3.2 Doublet complexe de Higgs

Le caractère sans masse des champs scalaires couplés aux champs de jauge est nécessaire à la réalisation du mécanisme de Higgs. Afin de garantir cette propriété de masse nulle malgré les corrections radiatives, on doit supposer que les scalaires sont des bosons de Goldstone correspondant à la brisure spontanée d'une symétrie globale: le lagrangien est invariant sous la symétrie globale correspondante, mais l'état fondamental ne l'est pas. Dans le SM, on introduit explicitement des degrés de liberté élémentaires qui vont fournir les scalaires sans masse, à travers la brisure de symétrie due aux signes des couplages choisis dans le potentiel scalaire <sup>5</sup>. L'identification d'un sous-groupe de cette symétrie globale brisée avec la symétrie de jauge sous laquelle les GBs doivent se transformer permet alors les interactions, nécessaires au mécanisme de Higgs, entre GBs et champs de jauge. Nous explicitons dans cette section la structure correspondante, faisant le lien avec la section 1.3.1.

<sup>4</sup>. Dans le cas de la théorie effective sans Higgs, la jauge unitaire est la jauge de prédilection pour toutes les applications.

<sup>5</sup>. Notons que, dans les extensions supersymétriques, on peut donner une origine dynamique au signe négatif de la masse carrée: son évolution depuis l'échelle d'unification vers l'échelle électrofaible est fortement liée au couplage de Yukawa du quark top, qui domine les autres contributions.

On introduit un doublet complexe  $\varphi$  dans une représentation du groupe de jauge à briser, c'est-à-dire  $SU(2)_w \times U(1)_Y$

$$\varphi \mapsto G e^{-i\frac{\alpha^0}{2}} \varphi. \quad (1.66)$$

On construit alors les termes invariants avec ces champs. D'après ses propriétés de transformation, ce doublet a une hypercharge  $Y=1/2$ , et on peut donc noter explicitement la charge électrique de chacune des composantes complexes

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix}. \quad (1.67)$$

Bien sûr, nous n'avons pas encore décrit la brisure de  $SU(2)_w \times U(1)_Y$  vers  $U(1)_Q$ , qui doit précisément être introduite grâce à ce doublet. Le lagrangien bosonique le plus général contenant uniquement des opérateurs de dimension quatre ou inférieure s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = D_\mu \varphi^\dagger D^\mu \varphi - \lambda \left( \varphi^\dagger \varphi - \frac{v^2}{2} \right)^2, \quad (1.68)$$

avec

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi - i \left( \frac{g'}{2} b_\mu^0 + g W_\mu \right) \varphi. \quad (1.69)$$

A ce stade, il est commode d'introduire la matrice  $2 \times 2$  notée  $\Phi$ , qui rassemble les quatre mêmes champs réel

$$\Phi \equiv (\varphi_c, \varphi) = \begin{pmatrix} \varphi_0^* & \varphi_+ \\ -\varphi_+^* & \varphi_0 \end{pmatrix}, \quad (1.70)$$

où le conjugué  $\varphi_c$  de  $\varphi$  est une autre combinaison des mêmes champs

$$\varphi_c \equiv i\tau^2 \varphi^* \mapsto G e^{i\frac{\alpha^0}{2}} \varphi_c. \quad (1.71)$$

On en déduit les propriétés de transformation de  $\Phi$

$$\Phi \mapsto G \Phi e^{i\frac{\tau^3}{2}\alpha^0}. \quad (1.72)$$

Par comparaison avec la transformation (1.29) pour les doublets de fermions droits, on voit que le champ de Higgs possède une hypercharge non-nulle, que l'on peut, utilisant la formule (1.32), attribuer à une valeur non-nulle de l'isospin droit avec  $B-L=0$ . On peut résumer les propriétés de transformation des différentes composantes des doublets selon le tableau 1.3.

	$T_w 3$	$T_d 3$	$B-L$	$Y$	$Q$
$\nu_L$	1/2	0	-1	-1	0
$e_L$	-1/2	0	-1	-1	-1
$\nu_R$	0	1/2	-1	0	0
$e_R$	0	-1/2	-1	-2	-1
$u_L$	1/2	0	1/3	1/3	2/3
$d_L$	-1/2	0	1/3	1/3	-1/3
$u_R$	0	1/2	1/3	4/3	2/3
$d_R$	0	-1/2	1/3	-2/3	-1/3
$\varphi_+$	1/2	1/2	0	1	1
$\varphi_0$	-1/2	1/2	0	1	0

**Tableau 1.3.** Charges des composantes des différents doublets du SM.

Le lagrangien (1.68) s'écrit avec cette notation

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \frac{1}{4} \langle D_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi \rangle - \frac{\lambda}{4} (\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle - v^2)^2, \quad (1.73)$$

où

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - i g W_\mu \Phi + i g' b_\mu \Phi \frac{\tau^3}{2}. \quad (1.74)$$

Grâce à cette écriture, on identifie dans la limite  $g' \rightarrow 0$ , une symétrie accidentelle du lagrangien  $\mathcal{L}_{\text{Higgs}}$  de (1.68): on peut, en plus de la multiplication à gauche par un élément de  $\text{SU}(2)_w$ , effectuer une transformation globale  $G_{\text{cust.}} \in \text{SU}(2)$  à la place de la transformation impliquant  $\alpha^0$ , sans modifier  $\mathcal{L}_{\text{Higgs}}$

$$\Phi \longmapsto G \Phi G_{\text{cust.}}^\dagger. \quad (1.75)$$

Cette symétrie approximative est appelée symétrie custodiale, et notée  $\text{SU}(2)_{\text{cust}}$ , et nous en verrons les conséquences plus tard.

### 1.3.3 Masses des bosons vecteurs

La brisure spontanée de symétrie a lieu lorsque l'on choisit dans le potentiel de Higgs (1.73)

$$v^2 > 0, \quad (1.76)$$

le signe positif de  $\lambda$  étant imposé par la nécessité d'avoir un potentiel borné par en bas. On voit alors que le potentiel présente une infinité continue de minima, relié entre eux par des transformations  $\text{SU}(2)$  pour lesquelles  $G = G_{\text{cust}}$ , c'est-à-dire le sous-groupe diagonal de la symétrie où les transformations  $G$  sont restreintes à leur sous groupe global: dans la limite  $g = g' = 0$ , la symétrie globale est donc spontanément brisée selon

$$\text{SU}(2)_w \times \text{SU}(2)_{\text{cust}} \longrightarrow \text{SU}(2)_{w+\text{cust}}. \quad (1.77)$$

Les minima correspondent à tous les points pour lesquels

$$\Phi^\dagger \Phi = \frac{v^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.78)$$

soit alternativement

$$\varphi^\dagger \varphi = \frac{v^2}{2}. \quad (1.79)$$

La théorie sélectionne donc un vide particulier, brisant la symétrie globale  $\text{SU}(2)_w \times \text{SU}(2)_{\text{cust}}$ .

On peut exploiter l'invariance de jauge pour décrire la même physique avec des variables différentes: on note que la matrice  $\Phi$  est auto-conjuguée, soit

$$\tau^2 \Phi^* \tau^2 = \Phi, \quad (1.80)$$

ce qui revient à dire que l'on peut l'écrire comme produit d'une fonction réelle par une matrice  $\text{SU}(2)$

$$\Phi = \frac{H + v}{\sqrt{2}} e^{i \frac{\pi^a \tau^a}{v}}, \quad (1.81)$$

où les minima du potentiel correspondent à avoir la composante radiale égale à  $v/\sqrt{2}$ , soit

$$H = 0. \quad (1.82)$$

On peut effectuer une transformation de jauge  $\text{SU}(2)_w$  qui élimine les champs  $\pi^a$ , en choisissant d'après (1.72) <sup>6</sup>

$$G = e^{-i \frac{\pi^a \tau^a}{v}}. \quad (1.83)$$



Le lagrangien de Higgs (1.68) se réécrit dans cette jauge unitaire

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = & \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4 \\ & + \left(1 + \frac{H}{v}\right)^2 \left(\frac{M_Z^2}{2} Z_\mu Z^\mu + M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu}\right),\end{aligned}\quad (1.84)$$

où les termes de masse pour les bosons vecteurs proviennent des termes cinétiques pour  $\Phi$ . Les masses sont données par les expressions

$$M_W^2 = \frac{g^2}{4} v^2, \quad (1.85)$$

$$M_Z^2 = \frac{g^2 + g'^2}{4} v^2 = \frac{M_W^2}{c^2}, \quad (1.86)$$

la diagonalisation nécessaire ayant déjà été introduite en (1.37-1.38). Le cosinus est bien le même que celui apparaissant dans la diagonalisation. Une conséquence phénoménologique importante est obtenue dans la limite de basse énergie si l'on écrit les opérateurs effectifs résultant de l'échange de ces bosons massifs: on obtient la théorie de Fermi. Sous l'écriture générale

$$\mathcal{L}_{\text{quatre fermions}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left( J_{CC\mu}^+ J_{CC\mu}^- + \rho_*(0) J_{NC\mu} J_{NC\mu}^\mu \right), \quad (1.87)$$

on trouve dans le cas du SM en arbres, que la constante de Fermi est donnée par

$$G_F = \frac{g^2}{4\sqrt{2} M_W^2} = \frac{1}{\sqrt{2} v^2}, \quad (1.88)$$

ce qui implique, avec  $G_F \simeq 1.16 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$

$$v \simeq 246 \text{ GeV}. \quad (1.89)$$

Le paramètre  $\rho_*(0)$  introduit en (1.87) est donné dans le SM en arbres par <sup>7</sup>

$$\rho_*^{\text{SM}}(0)|_{\text{arbres}} = \frac{M_W^2}{M_Z^2 c^2}. \quad (1.90)$$

D'après les formules de masses (1.85-1.86), on voit que ce rapport est égal à l'unité

$$\rho_*^{\text{SM}}(0)|_{\text{arbres}} = 1. \quad (1.91)$$

Cette relation obtiendra des corrections aux ordres supérieurs. Elle est liée à la symétrie custodiale  $\text{SU}(2)_{\text{cust.}}$  dans la limite  $g' \rightarrow 0$  du lagrangien tel que nous l'avons écrit jusqu'à présent (soit  $\mathcal{L}_{\text{fermions}} + \mathcal{L}_{\text{Yang-Mills}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}}$ , c'est-à-dire le lagrangien total hormis les termes de Yukawa que nous introduirons à la section 1.4.1). En effet, cette symétrie est responsable du fait que la matrice de masse dans la base originale  $(W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3, b_\mu^0)$  prend la forme

$$\frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 & -gg' \\ 0 & 0 & -gg' & g'^2 \end{pmatrix}. \quad (1.92)$$

6. Cette transformation de jauge effectuée au niveau du lagrangien est suffisante pour ce qui est de la physique en arbres. Pour étendre l'idée à l'intégrale fonctionnelle, voir [GKK93]. Dans le cas du SM, il est en général plus commode de fixer la jauge de la manière traditionnelle.

7. Remarquons qu'une relation de cette forme est souvent donnée comme définition du paramètre  $\rho$ . Voir à ce sujet l'annexe B.1.

La diagonalisation nécessite alors une transformation orthogonale impliquant le bloc  $2 \times 2$  en bas à droite pour définir les champs  $Z_\mu$  et  $A_\mu$  comme nous l'avons fait en (1.37-1.38). La symétrie  $SU(2)_{w+cust.}$  résultant de la brisure spontanée de  $SU(2)_w \times SU(2)_{cust.}$  est en revanche responsable du fait que le bloc  $3 \times 3$  en haut à gauche soit proportionnel à l'unité. Ainsi, bien que la symétrie de jauge  $SU(2)_w$  soit brisée, il reste une symétrie  $SU(2)$  approximative qui garantit que les interactions de Fermi des courants chargés et neutres dans (1.87) interviennent avec la même constante. On peut en déduire que les corrections radiatives à la relation (1.91) interviendront accompagnées de puissances de  $g'$ , ou de puissances des différences de masses (*splittings*) des fermions divisées par l'échelle de Fermi (violation d'isospin faible). En tout état de cause, la conclusion est que les corrections au résultat  $\rho_*^{SM}(0)|_{arbres} = 1$  seront petites. Pour reproduire ce succès phénoménologique, un modèle alternatif devra donc posséder une symétrie custodiale approximative. Une telle symétrie custodiale est donc en général un ingrédient essentiel des modèles alternatifs. Notons cependant que, dans le cas des modèles dits *little Higgs* [AHCKN02] ou basés sur des *mooses* [AHCG01b, AHCGW02, AH<sup>+</sup>02], ces symétries semblent ne pouvoir être réalisées que de manière approximative, même dans les limites mentionnées ci-dessus <sup>8</sup>.

Notons que le champ neutre  $H$  possède des interactions bien définies en fonction de deux constantes  $\lambda$  et  $v$ , qui sont également reliées à sa masse par la relation

$$m_H^2 = 2\lambda v^2. \quad (1.93)$$

Les couplages des interactions autres que les termes de masse des bosons vecteurs sont fixés par le fait que le boson de Higgs provient d'un doublet complexe, ce qui est nécessaire pour avoir une représentation linéaire de la symétrie (par opposition à une réalisation générale non-linéaire (voir section 2.1.3), qui ferait obstacle à la renormalisabilité de la théorie).

Nous avons introduit dans cette section la matrice  $\Phi$ , qui rassemble les degrés de liberté scalaires, car cette écriture permet de visualiser la symétrie custodiale que nous supposons être présente dans les théories que nous étudierons. De plus, cette écriture nous permettra de faire plus clairement le lien avec les lagrangiens chiraux, utilisés dans les théories effectives sans Higgs: la composante radiale de (1.81) sera alors absente, seuls les trois bosons de Goldstone étant supposés être présents.

Ceci conclut la discussion du secteur bosonique. Nous en venons à présent aux conséquences du mécanisme de Higgs dans le secteur fermionique.

## 1.4 Conséquences du mécanisme de Higgs élémentaire

L'introduction du doublet complexe de Higgs permet de construire une théorie renormalisable avec un nombre important de paramètre libres, nécessaires pour rendre compte des masses des fermions, et aussi de leur mélanges. Au niveau du SM, on ignore l'origine des constantes correspondantes apparaissant dans le lagrangien ainsi que leurs relations.

Notons que le mécanisme de Higgs élémentaire avait été introduit pour donner des masses aux bosons de jauge tout en conservant une théorie renormalisable. C'est cette renormalisabilité qui nous avait obligé à considérer un modèle invariant de jauge, interdisant par là même les termes de masses dans le lagrangien, tels qu'écrits en (1.58). En réalité, ce même doublet complexe de Higgs permet également d'écrire des termes d'interactions de Yukawa invariants sous la symétrie.

### 1.4.1 Interactions de Yukawa et masses de Dirac des fermions

Des termes de Yukawa invariants sous  $SU(2)_w \times U(1)_Y$  peuvent être construits à l'aide du doublet de Higgs. Nous les écrivons en termes de la matrice  $\Phi$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = & - \sum_{i,j=1}^3 \left( (\overline{u_{Ri}}, \overline{d_{Ri}}) \begin{pmatrix} y_{ij}^u & 0 \\ 0 & y_{ij}^d \end{pmatrix} \Phi^\dagger \begin{pmatrix} u_{Lj} \\ d_{Lj} \end{pmatrix} + (\overline{u_{Lj}}, \overline{d_{Lj}}) \Phi \begin{pmatrix} y_{ij}^{u*} & 0 \\ 0 & y_{ij}^{d*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{Ri} \\ d_{Ri} \end{pmatrix} \right) \\ & + (0, \overline{e_{Ri}}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_{ij}^e \end{pmatrix} \Phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_{Lj} \\ e_{Lj} \end{pmatrix} + (\overline{\nu_{Lj}}, \overline{e_{Lj}}) \Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_{ij}^{e*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e_{Ri} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.94)$$

<sup>8</sup>. Il n'existe pas de démonstration générale de ce fait, mais c'est ce que la littérature semble indiquer, voir [CW03, CDO03, HS04b]. On doit alors distinguer entre les différentes définitions des paramètres  $\rho$  et  $T$  dès l'ordre des arbres, voir l'annexe B.

Au niveau du SM strict, on ne peut pas construire d'opérateurs invariants de dimension inférieure ou égale à quatre qui donnent des masses aux neutrinos: nous reviendrons sur ce point à la section 1.6.1 et 1.6.2.1. Les constantes de couplages de Yukawa intervenant ici sont totalement libres. Notons que l'on peut bien introduire ces constantes de couplages selon une matrice diagonale sans que cette dernière soit proportionnelle à l'identité: en effet, une matrice diagonale quelconque commute avec les matrices  $\tau^3$  des transformations (1.29) et (1.72). En jauge unitaire ( $\Phi = (H + v)\mathbb{1}$ ), on voit que ces interactions produisent des termes de masse, les matrices de masse pour les quarks up, quarks down et leptons chargés étant données respectivement par

$$m_{ij}^u = \frac{y_{ij}^u v}{\sqrt{2}}, \quad (1.95)$$

$$m_{ij}^d = \frac{y_{ij}^d v}{\sqrt{2}}, \quad (1.96)$$

$$m_{ij}^e = \frac{y_{ij}^e v}{\sqrt{2}}. \quad (1.97)$$

Les différentes constantes de couplages de Yukawa permettent de rendre compte des différentes masses des fermions. En revanche, elles n'apportent aucune compréhension en ce qui concerne la hiérarchie des masses entre, par exemple, celle de l'électron (couplage de Yukawa de l'ordre de  $10^{-6}$ ) et celle du quark top (couplage de Yukawa proche de l'unité).

## 1.4.2 Matrice CKM

Les coefficients complexes apparaissant dans la matrice de masse des quarks à travers (1.94) sont libres. Ainsi, si l'on veut diagonaliser la matrice de masse complexe obtenue (1.95-1.96), on va utiliser des transformations unitaires globales opérant dans l'espace des indices de génération, et ce séparément pour les quarks  $u_i$  et pour les quarks  $d_i$  et séparément pour les deux chiralités. La situation dans le cas des leptons sera brièvement mentionnée plus bas à la section 1.6.1. Lorsque l'on effectue les redéfinitions à l'aide de matrices unitaires sur les quatre vecteurs à trois composantes  $u_{Li}, d_{Li}, u_{Ri}, d_{Ri}$  afin de diagonaliser les matrices de masses, on introduit une modifications des interactions décrites en 1.2.1.2. On définit ainsi

$$u_{Li} = (U_L)_{ij} u'_{Lj}, \quad (1.98)$$

$$d_{Li} = (D_L)_{ij} d'_{Lj}, \quad (1.99)$$

$$u_{Ri} = (U_R)_{ij} u'_{Rj}, \quad (1.100)$$

$$d_{Ri} = (D_R)_{ij} d'_{Rj}, \quad (1.101)$$

où les quatre matrices  $3 \times 3$  dénotées par  $U_{L,R}$  et  $D_{L,R}$  sont unitaires et les primes dénotent les états propres de masse. Remarquons que, dans le SM, ces rotations diagonalisent également les couplages de Yukawa, puisqu'il n'y a qu'un doublet de Higgs.

On peut voir immédiatement que l'écriture des courants neutres  $J_Q^\mu$  et  $J_{NC}^\mu$  est inchangée: il suffit d'ajouter les primes, puisque la même matrice intervient deux fois dans chaque terme, par exemple

$$\begin{aligned} \overline{u_{Li}} \gamma^\mu u_{Li} &= \overline{u'_{Li}} \gamma^\mu (U_L^\dagger)_{ij} (U_L)_{jk} u'_{Lk} \\ &= \overline{u'_{Li}} \gamma^\mu u'_{Li}. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Ainsi, en arbres, les courants neutres changeant la saveur (*flavor-changing neutral currents*, ou FCNCs) sont absents. En revanche, pour les courants chargés qui couplent une composante  $u$  avec une composante  $d$ , ceci n'est plus vrai. On définit la matrice unitaire  $V_{CKM}$  [Cab63, GIM70, KM73] selon

$$V_{CKM} = U_L^\dagger D_L, \quad (1.103)$$

ce qui donne pour le terme intervenant dans les courants chargés

$$\overline{u_{Li}}\gamma^\mu d_{Li} = \overline{u_{Li}}\gamma^\mu (V_{\text{CKM}})_{ij} d'_{Lj}, \quad (1.104)$$

et donc des interactions non-diagonales dans la base des états propres de masse. La structure des transitions entre générations est donnée directement par la matrice unitaire CKM, dont les entrées sont libres dans le SM: la prédiction est que toutes les transitions s'expriment en termes des trois angles et de l'unique phase physique contenue dans cette matrice. En effet, des six phases présentes dans une matrice unitaire  $3 \times 3$  générique, cinq peuvent être absorbées par des redéfinitions des vecteurs à trois entrées  $u_i$  et  $d_i$  (on doit appliquer la même transformation aux deux chiralités pour garder une masse réelle), tandis que la sixième redéfinition (correspondant à une phase globale) laisse invariante la matrice CKM. C'est cette unique phase qui doit rendre compte de la violation de  $CP$  observée dans les expériences, mais que l'on sait d'autre part être insuffisante pour être à l'origine de l'asymétrie baryonique de l'univers [GHO<sup>+</sup>94]. Ceci signifie uniquement que l'on doit chercher une extension à plus haute énergie de la théorie effective qu'est le SM, et que cette extension doit laisser la place à une violation de  $CP$  « plus importante ». En revanche, les expériences aux énergies accessibles actuellement et qui cherchent à mettre en défaut le SM en mesurant des processus distincts, mais décrits par le SM à l'aide des mêmes paramètres de la matrice CKM, n'ont pour l'instant pas permis de mettre le SM en défaut.

Après avoir décrit la structure du SM, et introduit ses 18 paramètres (dans le cas du SM strict, c'est-à-dire avec des masses de neutrinos égales à zéro), nous présentons un rapide survol des comparaisons avec l'expérience.

## 1.5 Succès phénoménologiques du SM

Jusqu'à présent, nous avons décrit la structure du SM en arbres, discutant tous les opérateurs renormalisables qui le composent. La théorie renormalisable est construite avec uniquement ces opérateurs: lorsque l'on calcule les corrections quantiques, on absorbe les divergences qui apparaissent à l'aide d'une redéfinition du nombre fini de constantes de couplage apparaissant en coefficient de ces opérateurs. Notre propos n'est pas ici de décrire la procédure de renormalisation dans le cas du SM: les principes en sont bien connus, étant donné que ce sont ceux qui régissent le développement perturbatif d'une théorie renormalisable<sup>9</sup>. Néanmoins, avant de passer en revue l'accord des prédictions du SM avec l'expérience, il paraît nécessaire de rappeler l'effort qui a été consacré et est encore consacré afin d'obtenir les résultats théoriques (et expérimentaux) que nous allons décrire.

### 1.5.1 Remarques sur les calculs de boucles

Les prédictions théoriques nécessitent toute une machinerie pour effectuer les calculs de boucles. Mentionnons ici qu'une partie des corrections les plus importantes ont été calculées à deux boucles, et toutes celles étudiées expérimentalement l'ont été jusqu'à une boucle. On utilise généralement la régularisation dimensionnelle: les constantes apparaissant dans le lagrangien deviennent dépendantes de l'échelle de renormalisation  $\mu$ , et présentent un pôle en  $d = 4$ , où  $d$  est la dimension d'espace-temps. Cette dépendance d'échelle et ces pôles sont compensés par les contributions de boucles, si bien que les résultats sont finis. Les calculs utilisent en général les jauges  $R_\xi$  [tH71a, FLS72] pour lesquelles les propagateurs des bosons vecteurs prennent la forme

$$G_{\mu\nu}(p, \xi) = -i \frac{\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 - \xi M^2 + i\epsilon}}{p^2 - M^2 + i\epsilon}, \quad (1.105)$$

qui a pour avantage de procurer une dépendance satisfaisante pour les grands  $p^2$

$$G_{\mu\nu}(p, \xi < \infty) \underset{p^2 \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{p^2}. \quad (1.106)$$

9. En revanche, nous nous attacherons (section 2.3) à décrire la procédure de renormalisation dans le cas d'une théorie effective à la Weinberg.

La jauge unitaire est obtenue dans la limite singulière  $\xi \rightarrow \infty$ , pour laquelle la décroissance du propagateur n'est plus suffisamment rapide pour rendre la propriété de renormalisabilité manifeste. Cette jauge n'est donc pas particulièrement adaptée pour une théorie renormalisable, d'autant que les contributions des bosons vecteurs (1.105) s'accompagnent dans une jauge  $R_\xi$  de contributions dues aux GBs, dont le propagateur prend la forme

$$G(p, \xi) = \frac{i}{p^2 - \xi M^2}, \quad (1.107)$$

où le même paramètre  $M$  apparaît que dans le propagateur du champ vecteur correspondant (1.105). Dans la limite  $\xi \rightarrow \infty$ , il subsiste néanmoins un effet de ces diagrammes impliquant les GBs, puisque certaines de leurs interactions sont proportionnelles à  $\xi$ . Ces diagrammes peuvent cependant être resommés [Wei73a, Wei73b], donnant lieu à des termes d'interactions du type de ceux obtenus par Lee et Yang [LY62]<sup>10</sup>: des interactions non-polynomiales proportionnelles à  $\delta^{(4)}(x=0)$ , qui disparaissent donc lorsque l'on utilise la régularisation dimensionnelle<sup>11</sup>. De tels termes peuvent directement être interprétés comme provenant du changement de variable effectué pour obtenir l'écriture (1.81): le jacobien correspondant est singulier en  $H=0$  [GKK93, Nyf]. En tout état de cause, la paramétrisation (1.81) introduit des interactions non-renormalisables, ce qui est maladroit dans le cas du SM. Nous insistons sur ce point pour clarifier les obstacles à l'utilisation de la jauge unitaire dans le cadre du SM: d'une part le comportement des propagateurs pour de grandes impulsions est inadapté pour une théorie renormalisable, d'autre part on génère des interactions non-polynomiales. Ces deux difficultés ne seront plus des obstacles à l'utilisation de la jauge unitaire dans le cas des théories sans particule de Higgs physique; nous y reviendrons au chapitre 3.

Revenant aux calculs effectués dans le SM, il est à noter que des prédictions pour les mêmes observables ont été obtenues par différents groupes, ce qui se traduit souvent en différents codes de calculs, et en l'utilisation de différents schémas de renormalisation. On peut également interpréter ces distinctions comme différents préjugés sur la resommation des ordres supérieurs [B<sup>+</sup>97, MNP98]. Ces différences dans le traitement précis de la procédure de développement à un ordre donné ne sont pas des incohérences, mais fournissent bien au contraire une estimation de l'incertitude théorique correspondant aux ordres supérieurs. L'accord entre les différents groupes à un niveau de précision acceptable vient confirmer d'un point de vue concret la cohérence de la théorie.

### 1.5.2 Approximation au pôle du $Z^0$

Une grande partie de l'activité consistant à tester les prédictions du SM est liée aux « mesures au pôle du  $Z^0$  »: les processus  $e^+ e^- \rightarrow f \bar{f}$  avec une énergie dans le centre de masse proche de la masse du  $Z^0$ . Dans cette section, nous nous concentrons sur l'analyse de ces processus. La section efficace en arbres pour le processus  $e^+ e^- \rightarrow Z \rightarrow f \bar{f}$  (c'est-à-dire en supprimant les contributions du photon qui ne sont pas résonantes pour  $s \simeq M_Z^2$ ) s'écrit, en négligeant les masses des fermions par rapport à  $M_Z$ <sup>12</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{N_c G_F^2 M_Z^4}{32 \pi^2 s} \frac{s^2}{(s - M_Z^2)^2 + \Gamma_Z^2 M_Z^2} \\ &\times \left\{ (g_v^{e2} + g_a^{e2}) (g_v^{f2} + g_a^{f2}) (1 + \cos^2 \theta) + 8 g_v^e g_v^f g_a^e g_a^f \cos \theta \right\}. \end{aligned} \quad (1.108)$$

10. Notons que dans la limite  $\xi \rightarrow \infty$ , les effets des fantômes de Faddeev-Popov disparaissent également, à quelques subtilités près [Jeg91]. En conclusion, cette procédure n'est pas appropriée pour définir la jauge unitaire, la limite étant singulière: il est préférable d'opérer au niveau du lagrangien même [Col84], à travers des redéfinitions des champs [GJ72], valables de façon générale dans le cadre de l'intégrale fonctionnelle [GKK93].

11. Néanmoins, on peut également conserver ces termes proportionnels à  $\delta^{(4)}(x=0)$ , et vérifier qu'ils sont compensés par des contributions dues aux bosons de Higgs [AQ72, Jog74].

12. La formule est écrite pour le cas des quarks, pour lesquels  $N_c = 3$ . Dans le cas des leptons dans l'état final, on posera  $N_c = 1$ .

A partir des « observables réalistes » effectivement mesurées à LEP et SLC, on obtient les paramètres du  $Z^0$  après déconvolution des effets de radiation dans les états initiaux et finaux dues à l'électrodynamique quantique (*quantum electrodynamics* ou QED) et des corrections dues à la QCD. Les paramètres ainsi extraits sont appelées des « pseudo-observables ».

Afin de permettre une description en termes de « couplages effectifs », c'est-à-dire de paramètres qui généralisent ceux apparaissant dans l'expression de la section efficace de Born (1.108), on effectue un certain nombre d'approximations [B<sup>+</sup>97, MNP98]. En effet, la section efficace à une boucle s'exprime en réalité en termes de facteurs de formes complexes, et non plus en termes des constantes  $g_{v,a}^f$ . Ces facteurs de forme dépendent non seulement de la variable de Mandelstam  $s$ , mais également de  $t$ , suite aux contributions des diagrammes de type *box*. Comme les contributions de ces diagrammes sont petites (excepté en jauge unitaire, où elles divergent) car non-résonantes au pôle du  $Z^0$ , l'idée est de les négliger <sup>13</sup>. Ceci supprime donc la dépendance en  $t$ , et permet également de récupérer une forme où les couplages des fermions  $f$  et des électrons sont factorisés et où la contribution du photon peut être séparée. On peut alors mettre la section efficace à une boucle sous la même forme que celle obtenue en arbres, la contribution du  $Z^0$  étant écrite comme en (1.108) avec la modification de notation

$$g_{v,a}^f \longrightarrow g_{V,A}^f. \quad (1.109)$$

Précisons encore un point supplémentaire: les diagrammes d'énergie propre des bosons vecteurs se subdivisent en deux ensembles: les contributions comportant des bosons dans la boucle, et celles dues aux fermions. Ces deux types de corrections sont indépendantes des fermions observés dans l'état final. De plus, la contribution des fermions, numériquement plus importante, est invariante de jauge. L'approche généralement adoptée est d'effectuer une resommation sur cette classe de diagrammes. En revanche, la contribution bosonique à ces fonctions à deux points n'est pas invariante de jauge: la dépendance de jauge doit être compensée par celle des diagrammes *box* en particulier. Cette classe de diagrammes n'est donc pas resommée.

Notons que l'utilisation directe des résultats expérimentaux pour les pseudo-observables dans un modèle alternatif n'est pas nécessairement justifiée à partir du moment où un certain nombre d'ingrédients théoriques et d'approximations (spécifiques au SM) ont été employés.

## 1.5.3 Ajustement de paramètres dans le SM

### 1.5.3.1 EWPTs

Un certain nombre d'observables, dont une grande partie sont mesurées au pôle du  $Z^0$ , sont regroupées sous le nom de « tests de précision électrofaible » (*electroweak precision tests*, ou EWPTs). Dans cette section, on se concentre sur les mesures expérimentales qui donnent lieu au fameux ajustement des paramètres électrofaibles, suivant [Mat04].

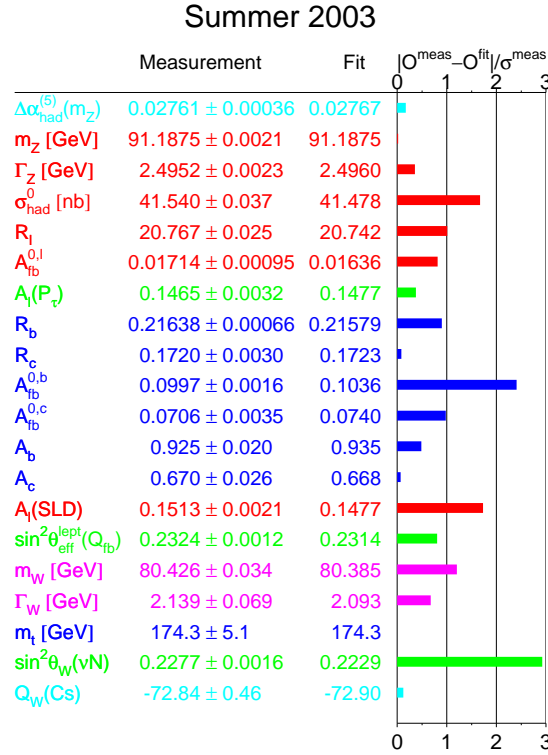
Après avoir effectué les calculs mentionnées en 1.5.1 et extrait les pseudo-observables de la section 1.5.2, on procède de la façon suivante. Comme paramètre d'entrée, on utilise les trois paramètres les plus précisément connus (par des mesures « directes »):  $\alpha(\mu=0)$ ,  $G_F$ ,  $M_Z$ , au lieu des trois paramètres fondamentaux ( $g$ ,  $g'$ ,  $v$ ) apparaissant dans le lagrangien. Au niveau des boucles, les prédictions vont aussi dépendre des couplages de Yukawa, qui sont remplacés en pratique par les masses des fermions en tant que paramètres d'entrée, mais également de la constante de couplage forte et du couplage quartique du doublet de Higgs  $\lambda$ . Ce dernier paramètre fondamental est remplacé par  $m_H$ , qui intervient donc dans les expressions théoriques des observables. Comme cela fut le cas pour le quark top avant sa découverte expérimentale, on va donc pouvoir placer des limites sur la masse d'une particule hypothétique. Si l'on mesure suffisamment d'observables, on peut effectivement contraindre les différents paramètres du SM.

<sup>13</sup>. On peut se soucier du manque d'invariance de jauge du résultat. En pratique, la sensibilité des calculs à l'approximation décrite est testée numériquement.

Nous ne définirons pas ici les différentes observables qui entrent dans cette étude. Notons cependant que, pour une observable donnée  $\mathcal{O}$ , le désaccord entre la prédiction théorique après ajustement des paramètres  $\mathcal{O}^{\text{fit}}$  et la mesure expérimentale  $\mathcal{O}^{\text{meas}}$  est mesuré par le *pull*

$$\text{pull} = \frac{|\mathcal{O}^{\text{meas}} - \mathcal{O}^{\text{fit}}|}{\sigma}, \quad (1.110)$$

où intervient également l'erreur combinée  $\sigma$ . On constate sur la figure 1.1 que la plupart des mesures sont en accord avec le SM: il y a bien deux observables pour lesquelles le désaccord est plus grand que deux déviations standard. Ceci n'est pas surprenant pour un ensemble de mesure de cette taille.



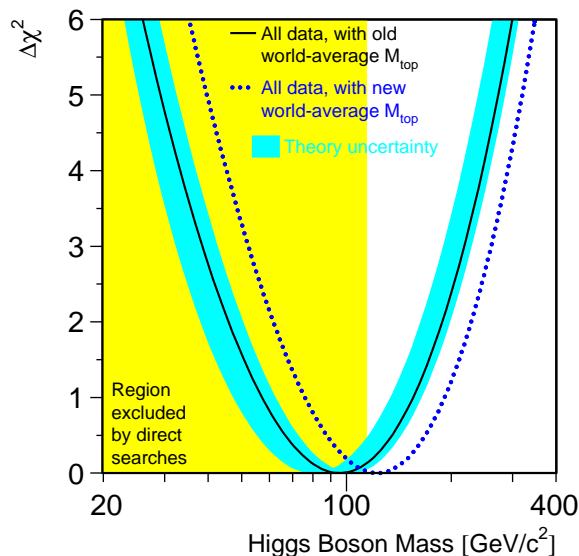
**Figure 1.1.** Accord entre les valeurs mesurées et les prédictions du SM pour certaines observables [LEP].

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'ajustement des paramètres donne lieu à des contraintes sur les valeurs possibles de ces mêmes paramètres. Pour la plupart d'entre eux, qui sont mesurés par ailleurs, le but est de chercher un désaccord pour mettre en défaut le SM et détecter un effet dû à de la nouvelle physique. Il en est différemment pour ce qui est de la masse du boson de Higgs. Puisque cette particule est toujours hypothétique et que sa masse n'a donc pu être mesurée, les contraintes extraites de l'ajustement de paramètre nous permettent de prédire dans quelle fenêtre on doit s'attendre à la trouver. Ceci est illustré par la figure 1.2, où est utilisée la valeur la plus récente de la masse du top [TeV]

$$m_t = 178.0 \pm 4.3 \text{ GeV}, \quad (1.111)$$

qui montre que l'intervalle de confiance à 95% donne [LEP]

$$m_H < 251 \text{ GeV}. \quad (1.112)$$



**Figure 1.2.** Contrainte sur  $m_H$  dans le cadre du SM. Les courbes représentent la valeur de  $\chi^2 - \chi_{\min}^2$  en fonction de  $m_H$ . La bande foncée représente les incertitudes théoriques, et la courbe en pointillés est obtenue avec la valeur la plus récente pour la masse du quark top. Le rectangle gris clair représente les masses exclues par les recherches directes [LEP].

On a donc, indépendamment de considérations théoriques que nous donnerons à la section 1.6.3, une limite expérimentale (indirecte) supérieure sur  $m_H$ , en plus de la limite inférieure d'exclusion directe à 95% de confiance [LEP]

$$m_H > 114.4 \text{ GeV}. \quad (1.113)$$

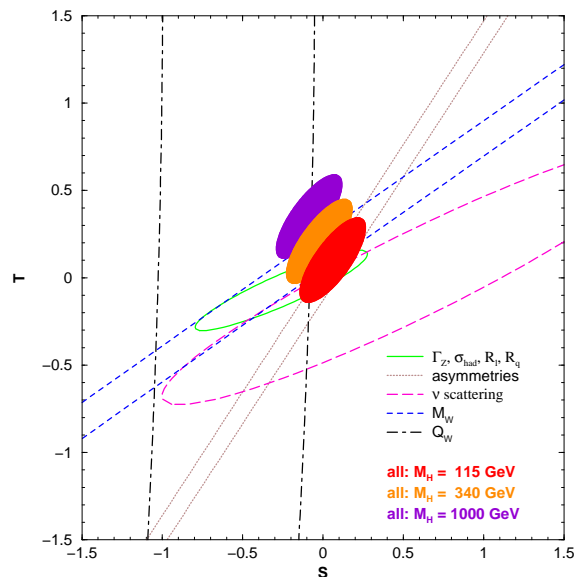
### 1.5.3.2 Correction obliques

Une première tentative en vue d'interpréter les EWPTs dans un cadre plus large que le SM a consisté en l'introduction des « paramètres obliques » [PT90, MR90, KL90, AB91, PT92]. L'idée est que ces paramètres décrivent les effets principaux de la nouvelle physique. En effet, l'introduction de physique nouvelle ajoutera de nouveaux paramètres à ceux présents dans le SM, et qui sont utilisés en particulier pour effectuer l'ajustement décrit à la section 1.5.3.1. En principe, on doit calculer les observables pour chaque modèle, puis comparer les résultats à l'expérience en utilisant la même procédure que pour le SM. En pratique, le nombre de modèles connus rend cette tâche rédhibitoire. Certains auteurs ont donc essayé de formuler une paramétrisation simple mais englobant si possible une large classe de modèles. L'hypothèse principale est que les corrections les plus notables affecteront essentiellement les fonctions à deux points des bosons vecteurs: ces corrections sont appelées « obliques ». Elles affectent alors de façon universelle les processus  $e^+ e^- \rightarrow f \bar{f}$ , quel que soit le fermion  $f$ , ce qui fait leur facilité d'utilisation.

Les corrections obliques sont souvent exprimées en termes des paramètres  $S, T, U$ , dont la définition originale utilise les fonctions à deux points des champs vecteurs. La question de l'invariance de jauge se pose alors. D'autre part, la présentation des résultats fait toujours appel au SM avec une valeur de  $m_H$  donnée. L'annexe B contient une discussion des paramètres obliques et de questions reliées.

La figure 1.3 donne l'ajustement des paramètres en incluant  $S$  et  $T$ , mais fixant  $U = 0$ . A ce niveau, on ne peut pas placer de limites indépendamment sur  $S, T$  et  $m_H$ . La figure permet en revanche de dire que, si un boson de Higgs de 115 GeV est présent, la nouvelle physique au-delà du SM ne doit apporter que des faibles contributions à  $S$  et  $T$ . Ceci est une autre façon de voir que le SM rend bien compte des EWPTs sans nouvelle physique. Ainsi, les extensions supersymétriques du SM cherchent-elles à préserver cet accord, tout en introduisant des nouvelles particules pour protéger la masse du boson de Higgs (voir section 1.6.3).





**Figure 1.3.** Contraintes à  $1\sigma$  sur les paramètres  $S$  et  $T$  pour  $m_H = 115$  GeV pour différentes observables ( $U$  est supposé être nul). Les ovales représentent les intervalles de confiance à 90% pour différentes valeurs de  $m_H$ , après combinaison des différentes observables [PDG].

Les diagrammes du type de la figure 1.3 sont à l'origine de l'interprétation qu'il faudrait une « conspiration » de la physique nouvelle pour que les théories sans Higgs soient capable de rendre compte des EWPTs. L'idée sous-jacente est la suivante: la limite de Higgs lourd est supposée donner une première idée du comportement des théories sans Higgs <sup>14</sup>. Par exemple, pour  $m_H = 1$  TeV, on constate qu'il est nécessaire d'avoir  $T \simeq +0.3$  pour satisfaire les EWPTs. Cependant, la référence à un boson de Higgs dans le cadre d'une théorie sans Higgs semble inutile et, qui plus est, dangereuse. Le but de cette thèse est précisément de mettre en place un formalisme effectif indépendant pour les théories sans Higgs, suivant la ligne d'idée des « lagrangiens chiraux pour le secteur électrofaible » (*electroweak chiral lagrangians*) [HT90, DEH91, EH92, Fer93, Wud94, NS00]. Précisons dès maintenant que les difficultés principales auront trait aux paramètres  $S$  et  $T$  <sup>15</sup>, et également au secteur fermionique, qui n'a été abordé que récemment [NS96, BEM99, NS00] dans ce contexte, et pas encore de façon systématique. Différents problèmes apparaîtront alors dès l'ordre des arbres.

Pour clore cette section, on peut dire que le SM accommode extrêmement bien les données expérimentales. Les raisons d'aller au-delà du SM se trouvent donc ailleurs: en effet, on sait que le SM n'est pas la description définitive des tous les phénomènes en physique des hautes énergies. Nous en venons à présent à discuter plus précisément les raisons qui ont amené la communauté à penser ainsi.

## 1.6 Le SM comme théorie effective (découplante)

Nous discutons ici les limites d'application pratiques et de principe du SM. L'état actuel de notre compréhension de la théorie des champs est que le SM doit être vu comme une théorie effective valable jusqu'à une certaine échelle, à laquelle de nouvelles particules peuvent être produites. Une nouvelle théorie, englobant le SM, doit alors prendre le pas.

<sup>14</sup>. Nous préciserons à l'annexe C en quoi ceci n'est pas justifié dès que l'on considère la théorie sans particule de Higgs à l'ordre des boucles.

<sup>15</sup>. Qui est déjà en cause pour exclure les modèles de technicouleur, voir la section 1.7.3 et l'annexe C.

Dans le cas d'une théorie renormalisable, les effets à basse énergie de la nouvelle physique se font sentir à travers les opérateurs *irrelevantes*, qui sont divisés par une échelle de masse. Les opérateurs renormalisables décriront la physique à basse énergie avec une précision d'autant meilleure que l'échelle  $\Lambda$  sera grande. La théorie effective correspondante est souvent appelée *découplante*, car l'échelle  $\Lambda$  peut être envoyée vers l'infini sans incohérence technique: les effets de la nouvelle physique disparaissent alors complètement.

Lorsque l'on se trouve dans le cas opposé (celui des théories effectives non-découplantes), on doit procéder suivant une autre organisation de l'infini d'opérateurs permis par les symétries: le critère de renormalisabilité n'est plus un guide approprié. Nous aborderons ce cas au chapitre 2. Pour le moment, nous nous intéressons à une première extension du SM pour expliquer les faibles masses des neutrinos. Nous verrons ensuite comment les mêmes effets à basse énergie sont décrits par un opérateur effectif. Nous discutons ensuite une classe d'opérateurs effectifs qui nous informe sur le mécanisme de l'EWSB.

### 1.6.1 Mécanisme *see-saw* et masses de Majorana pour les neutrinos

Nous présentons dans cette section la description la plus courante utilisée pour rendre compte des faibles masses des neutrinos: on fait pour cela intervenir des champs  $\nu_R$  lourds. En effet, puisque ces champs ne sont pas chargés sous la symétrie  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ , leurs masses ne sont pas liées à la brisure électrofaible, et n'ont donc aucune raison d'être d'ordre  $v$ .

Avec ces neutrinos hypothétiques lourds  $\nu_{Ri}$  invariants sous  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ , on peut construire les termes suivant dans le lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{neutrinos}} = & \sum_{i=1}^3 \bar{\nu}_{Ri} \gamma^\mu \partial_\mu \nu_{Ri} \\ & - \sum_{i,j=1}^3 \left( (\bar{\nu}_{Ri}, \bar{e}_{Ri}) \begin{pmatrix} y_{ij}^\nu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_{Lj} \\ e_{Lj} \end{pmatrix} + (\bar{\nu}_{Lj}, \bar{e}_{Lj}) \Phi \begin{pmatrix} y_{ij}^{\nu*} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{Ri} \\ e_{Ri} \end{pmatrix} \right) \\ & + M_{ij} \bar{\nu}_{Ri} (\nu_{Rj})^c + M_{ij}^* (\nu_{Rj})^c \nu_{Ri}, \end{aligned} \quad (1.114)$$

où les indices de générations sont explicitement écrits. Il n'y a aucune contrainte théorique sur les constantes  $M_{ij}$  apparaissant dans le lagrangien, et aucun lien avec la brisure électrofaible : on peut donc logiquement imaginer qu'elles soient de l'ordre de l'échelle de la nouvelle physique inconnue qui les génère, et donc éventuellement de l'ordre de  $10^{15}$  GeV (échelle de grande unification)<sup>16</sup>. Ceci permet, grâce au mécanisme *see-saw* [GMRS79, Yan79], d'obtenir trois états propres lourds (de l'ordre des valeurs propres de  $M_{ij}$ ) qui sont essentiellement une combinaison linéaire des états propres d'interactions  $\nu_{Ri}$ , et peuvent être qualifiés de « stériles », puisque leurs interactions avec les champs vecteurs sont supprimées par rapport à celles des leptons chargés. Plus important du point de vue physique, on obtient également trois états propres de masses très faibles avec des grandes composantes  $\nu_{Li}$  et de faibles composantes  $(\nu_{Ri})^c$ , qui sont donc appelés « actifs ». Ceci se vérifie en étudiant la diagonalisation de la matrice de masse pour les neutrinos: voir l'annexe A pour le cas d'une génération. Les masses des états propres légers sont alors d'ordre

$$m_{\nu \text{ actifs}} \sim \frac{y^2 v^2}{M}, \quad (1.115)$$

où  $y$  représente un couplage de Yukawa générique et  $M$  dénote une valeur propre de la matrice  $M_{ij}$ . Le point est que l'équation (1.115) permet, avec  $M$  grand, d'obtenir une masse de ces neutrinos actifs plusieurs ordres de grandeurs plus faible que les masses de Dirac des autres fermions et en particulier que celles des leptons chargés. Or, on sait que les limites actuelles sur les masses des neutrinos sont de l'ordre de l'électron-volt: le mécanisme *see-saw* permet donc de comprendre la légèreté des neutrinos, relativement aux autres fermions. Il reste encore à expliquer la hiérarchie entre l'électron et le quark top, ce qui nécessite des idées au-delà du SM (symétries horizontales par exemple).

16. Du point de vue logique, dans une théorie renormalisable, on ne peut pas estimer l'échelle à laquelle la nouvelle physique doit intervenir, la procédure de développement étant techniquement viable jusqu'à une échelle arbitrairement grande. Nous verrons cependant à la section 1.6.3.1 que les divergences quadratiques à la masse du Higgs peuvent donner une idée des limitations de principe de la théorie, ainsi de l'échelle à laquelle elle devrait être complétée.

## 1.6.2 Opérateurs *irrelevant*s

Le SM est une théorie renormalisable. Les effets à basse énergie de la nouvelle physique peuvent être décrits par des opérateurs *irrelevant*s construits avec les champs du SM et respectant ses symétries. Nous mentionnons ici quelques-uns de ces opérateurs. Le fait est que, dans une théorie renormalisable telle que le SM, on peut imaginer que l'échelle de masse  $\Lambda$  qui divise ces opérateurs pour obtenir des objets de dimension quatre, soit suffisamment grande pour que les effets soient indétectables. Il suffit que cette échelle  $\Lambda$ , à laquelle la nouvelle physique qui produit ces opérateurs effectifs deviendrait visible, soit grande devant l'échelle de Fermi. Or, dans une théorie renormalisable, il n'y a pas d'incohérence *interne* à considérer que la théorie soit valable jusqu'à une échelle arbitrairement grand.

Nous avons également mentionné le problème de la génération de l'asymétrie baryonique de l'univers, ainsi que les nombre important de constantes arbitraires, qui suggère que le SM n'est pas une théorie fondamentale. Notons que, dans tous les cas, ces questions sont liées au fait que le SM doit être intégré dans une théorie plus générale valable à plus haute énergie, et donc plus fondamentale. Nous mentionnerons à la section 1.6.3 une autre difficulté de principe qui rentrerait dans cette catégorie: il s'agit du problème de hiérarchie des échelles.

### 1.6.2.1 Opérateur effectif de dimension cinq

Il existe un type d'opérateurs effectifs de dimension cinq construit avec les champs du SM et invariant sous  $SU(2)_w \times U(1)_Y$ : on s'attend *a priori* à ce qu'il fournisse les premières déviations du SM, puisque la suppression par l'échelle de la nouvelle physique  $y$  est la plus faible (une seule puissance de  $\Lambda$  au dénominateur).

Afin d'écrire ce premier opérateur effectif, on définit le conjugué complexe invariant de Lorentz  $\chi^c$ <sup>17</sup> d'un doublet fermionique  $\chi$

$$\chi^c = i\tau^2 C \bar{\chi}^T = \begin{pmatrix} (\chi_d)^c \\ -(\chi_u)^c \end{pmatrix}, \quad (1.116)$$

ce qui entraîne (comparer avec (1.28-1.29))

$$(\chi_L)^c = \frac{1+\gamma_5}{2} \chi^c \mapsto G e^{i\frac{B-L}{2}\alpha^0} (\chi_L)^c, \quad (1.117)$$

$$(\chi_R)^c = \frac{1-\gamma_5}{2} \chi^c \mapsto e^{-i\frac{\tau^3}{2}\alpha^0} e^{i\frac{B-L}{2}\alpha^0} (\chi_L)^c. \quad (1.118)$$

L'opérateur de dimension cinq en question est [Wei79b]

$$\mathcal{L}_{\text{Majorana } L} = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i,j=1}^3 \left( c_{ij} \overline{(\ell_{Li})^c} \Phi \tau^- \Phi^\dagger \ell_{Lj} + c_{ij}^* \overline{\ell_{Lj}} \Phi \tau^+ \Phi^\dagger (\ell_{Li})^c \right), \quad (1.119)$$

où l'échelle  $\Lambda$  est caractéristique de la physique qui génère cet opérateur effectif, et est supposée être grande devant l'échelle électrofaible (avec des constantes  $c_{ij}$  d'ordre unité). L'opérateur effectif (1.119) brise explicitement la symétrie custodiale  $G_{\text{cust.}}$  agissant sur  $\Phi$  selon (1.75). En réalité, il brise même explicitement le sous-groupe  $U(1)$  de cette symétrie, qui correspond au générateur  $T_d 3$ . Cependant, l'opérateur est bien invariant sous la symétrie de jauge, puisqu'il viole également explicitement le nombre leptonique par deux unités, respectant ainsi la symétrie  $U(1)_Y$ . Il produit des masses de Majorana d'ordre

$$m_L \sim \frac{v^2}{\Lambda}, \quad (1.120)$$

comme on peut le vérifier en jauge unitaire. Il est ainsi possible de décrire les faibles masses des neutrinos sans même introduire de degrés de libertés supplémentaires à ceux du SM (c'est-à-dire sans considérer de  $\nu_R$ ), en écrivant les opérateurs non-renormalisables de plus basse dimension respectant les symétries du SM. En réalité, les conséquences à basse énergie de (1.119) sont les mêmes que celles résultant de « l'intégration » des  $\nu_{Ri}$  lourds introduits dans (1.114). On peut également adopter le point de vue suivant, correspondant à celui des théories effectives: le mécanisme de *see-saw* décrit en 1.6.1 est un modèle particulier permettant de générer explicitement l'opérateur effectif de (1.119). En effet, les degrés de liberté lourds  $\nu_{Ri}$  peuvent être éliminés,

17. Le conjugué pour un spineur de Dirac est défini à l'annexe A.3.

et leur effet représenté par un opérateur effectif, qui sera toujours *irrelevant* dans le cas d'une théorie découplante (c'est-à-dire de dimension supérieure à quatre), puisque tous les opérateurs renormalisables construits avec les champs de la théorie ont déjà été inclus dans le lagrangien. Dans une théorie effective, on ne se préoccupe pas de la construction d'un modèle, mais l'on écrit de façon générale les opérateurs effectifs.

La situation concernant le mélange pour les leptons est légèrement différente du cas des quarks, du fait des termes de masse de Majorana pour les neutrinos. La diagonalisation de la matrice de masse de Majorana de (1.119) et de Dirac pour les électrons (apparaissant en (1.97)) pour trois générations se fait à l'aide de trois matrices unitaires, respectivement pour les vecteurs à trois entrées  $e_{Li}$ ,  $e_{Ri}$  et  $\nu_{Li}$ . Le produit des matrices de changement de base pour les deux projections gauches intervient alors dans l'expression des courants chargés, de façon analogue au cas de la matrice CKM; cette matrice est appelée matrice MNS [MNS62]. La différence est que l'on ne peut pas absorber autant de phases, et la matrice MNS contient donc trois angles et trois phases physiques. Notons que la matrice de passage entre la base originale et celle des états propres de masse est celle qui intervient dans le phénomène d'oscillations. Les phases ne sont cependant pas observées dans ces expériences. En revanche, elles interviennent dans la désintégration double- $\beta$  sans neutrinos, qui est possible du fait de la violation du nombre leptonique introduite par le terme de masse de Majorana.

### 1.6.2.2 Opérateurs *irrelevant*s de dimensions six

Nous donnons à présent quatre opérateurs de dimension six. Nous nous concentrons sur ceux qui impliquent le doublet de Higgs, et qui sont donc liés au mécanisme de brisure de la symétrie. La question qui se posera dans le cadre de la théorie effective sans Higgs et de savoir quelles sont les modifications dues à l'absence du boson de Higgs. En d'autres termes, on se demandera à quel niveau les opérateurs correspondants apparaîtront, s'ils seront supprimés, ou bien au contraire s'ils apparaîtront dès l'ordre dominant.

Le premier opérateur concerne uniquement le secteur bosonique, et introduit un terme croisé entre le tenseur de Faraday des champs de jauge non-abéliens de  $SU(2)_w$  et celui du champ de jauge de l'hypercharge  $U(1)_Y$ , sous la forme

$$\frac{1}{\Lambda^2} b_{\mu\nu} \langle \Phi \tau^3 \Phi^\dagger W^{\mu\nu} \rangle. \quad (1.121)$$

En jauge unitaire et en utilisant la diagonalisation des champs (1.37-1.38) ainsi que la décomposition alternative (B.14), on voit que ce terme donne une contribution à la combinaison (B.24) des fonctions à deux points, c'est-à-dire au paramètre  $S$ . Une contribution au paramètre  $T$  serait donnée par l'opérateur suivant, qui viole la symétrie custodiale (le lien entre cet opérateur et le paramètre  $T$  se comprend à l'aide de la relation (B.26) et en utilisant la jauge unitaire)

$$\frac{1}{\Lambda^2} \langle \tau^3 \Phi^\dagger D_\mu \Phi \rangle \langle \tau^3 \Phi^\dagger D^\mu \Phi \rangle. \quad (1.122)$$

De nouveau, nous constatons qu'une symétrie accidentelle des termes renormalisables que l'on écrit avec les champs du SM, n'est plus vérifiée dès que l'on introduit des opérateurs *irrelevant*s: la symétrie custodiale, qui était également violée par l'opérateur (1.119).

Parmi les autres opérateurs de dimension six possibles [BW86, SCW98], on trouve notamment

$$\frac{1}{\Lambda^2} \overline{\chi_{fL}} \gamma^\mu \Phi (D_\mu \Phi)^\dagger \chi_{fL}, \quad (1.123)$$

$$\frac{1}{\Lambda^2} \overline{\chi_{fR}} \gamma^\mu \Phi^\dagger (D_\mu \Phi) \chi_{fR}. \quad (1.124)$$

En jauge unitaire, ces termes correspondent à des couplages des bosons vecteurs aux fermions. Les constantes apparaissant devant ces opérateurs peuvent être arbitraires, et dépendent *a priori* du fermion considéré, et en particulier de la génération, puisque les termes ci-dessus sont invariants de jauge indépendamment pour chaque doublet, tandis que les couplages introduits simultanément aux termes cinétiques étaient tous fixés par l'invariance de jauge une fois que le terme cinétique était correctement normalisé. Ces nouveaux opérateurs de dimension six introduisent donc des corrections à l'universalité des couplages, comme nous l'avions annoncé à la section 1.1.3. Ils engendreront également des processus violant la saveur, étant donné que les deux doublets peuvent porter des indices de génération différents.

L'idée n'est pas ici de donner une liste complète des opérateurs de dimension six que l'on peut construire à l'aide des champs du SM, ce qui a déjà été fait [BW86], mais d'en mentionner certains dont nous rencontrerons les analogues dans le cas sans Higgs, et qui poseront donc des problèmes phénoménologiques. En effet, de tels opérateurs sont supprimés par une échelle dans le cas du SM, et donc *irrelevant*s à basse énergie. En revanche, ils ne seront pas supprimés dans le comptage de puissance approprié pour une théorie effective non-découplante. Ils ne seront pas non plus divisés par une échelle. On comprend que le statut de ces opérateurs soit différent dans le cas sans Higgs, puisque la matrice  $\Phi$  de dimension physique unité sera remplacée par une matrice unitaire  $\Sigma^\dagger$ . On se doit alors d'expliquer leur suppression à l'aide d'une symétrie, ce que nous ferons au chapitre 5.

Il existe également des opérateurs *irrelevant*s, n'impliquant pas le doublet de Higgs: on peut ainsi construire des opérateurs à quatre fermions. Le statut de tels opérateurs n'est pas différent dans le cas sans Higgs: la même division par une échelle que dans le cas du SM est présente et la difficulté n'est donc pas nécessairement plus aiguë que dans le cas du SM. D'une façon générale, de tels termes auraient un effet sur la structure en génération des fermions, problème que nous n'aborderons pas ici.

### 1.6.3 Hiérarchie et naturalité

Nous avons présenté à la section 1.5 une brève revue des nombreux succès non-triviaux du SM. Comparativement, les difficultés liées au SM sont peu nombreuses: elles consistent en de nouvelles questions soulevées par le modèle, auxquelles celui-ci ne répond pas. Ces difficultés sont de nature théorique, et sont une manifestation du fait que le SM n'est pas la théorie ultime qui doit expliquer tous les phénomènes connus en terme d'un nombre restreint de paramètres, mais nécessite qu'une autre théorie, éventuellement plus proche de ces objectifs, prenne le relais au-delà d'une certaine échelle.

#### 1.6.3.1 Divergences quadratiques à la masse du Higgs

Parmi les nombreux paramètres introduits aux sections 1.1, 1.3 et 1.4, il reste une combinaison qui n'est observable directement que dans le secteur de Higgs, tandis que les autres ont des effets pour des processus impliquant les bosons vecteurs et les fermions déjà observés auprès des accélérateurs. En particulier, tous les couplages de Yukawa donnent les masses des fermions, et les matrices de mélanges sont testées dans des processus n'impliquant pas le boson de Higgs. Également, la valeur moyenne dans le vide  $v$  du champ de Higgs est directement reliée à la constante de Fermi par (1.88). En revanche, le paramètre libre restant  $\lambda$  n'intervient que dans le potentiel de Higgs: en particulier, la masse du boson de Higgs est donnée en fonction de  $\lambda$  et  $v$  par (1.94). Le point est que cette masse n'a pas été mesurée à ce jour, pour la simple raison que le boson de Higgs n'a pas été observé. En revanche, cette constante intervient dans les corrections radiatives à de nombreuses observables. Les autres paramètres étant connus (hormis la masse du quark top qui souffre encore d'incertitudes relativement importantes), on peut donc donner des limites sur cette masse, voir figure 1.2. Cette façon de faire a un inconvénient évident: elle exclut d'office toute analyse en terme de modèle sans Higgs. Un des objectifs à long terme de la LEET pour le secteur électrofaible, dans laquelle s'inscrit cette thèse, est précisément de permettre une paramétrisation des mêmes observables dans le cas sans Higgs, et d'en obtenir une information sur les modèles possibles.

Dans cette section nous précisons une difficulté théorique du mécanisme de Higgs élémentaire, c'est-à-dire tel qu'il est réalisé dans le SM. Cette difficulté a historiquement incité à rechercher une alternative au mécanisme de Higgs élémentaire. Le point important est que les scalaires élémentaires ne sont pas naturels au sens de 't Hooft [tH79a], tandis que les théories de jauge asymptotiquement libres peuvent naturellement générer une grande hiérarchie. En effet, du point de vue théorique, il paraît souhaitable que les propriétés observables de la théorie soient stables vis-à-vis de petites variations des paramètres. C'est là l'idée de naturalité, qui énonce que les seuls paramètres petits acceptables sont ceux résultant en un accroissement de symétrie lorsqu'ils sont posés égaux à zéro (ou de façon plus générale, toute relation approximative entre paramètres doit être liée à un tel accroissement de symétrie).

Pour discuter ces idées dans le cas du SM, nous nous intéressons aux divergences à une boucle, et plus particulièrement à celles qui affectent la masse du Higgs. Comme la limite  $m_H \rightarrow 0$  ne correspond pas à un accroissement de symétrie, les différentes contributions des boucles ne contiennent pas une puissance de masse en facteur, comme ce serait le cas pour un fermion. Si l'on tient compte des dimensions physiques, on s'aperçoit que la renormalisation de la masse peut donc présenter des divergences quadratiques, si l'on n'utilise pas la régularisation dimensionnelle. Ce problème est bien connu et constitue l'obstacle principal à l'utilisation d'un scalaire élémentaire dans une théorie naturelle [tH79a]. Dans le cas du SM, on trouve des contributions dues aux boucles des bosons vecteurs massifs, ainsi qu'à celles de fermions, pour lesquels nous n'incluons que la contribution du quark top, qui est dominante du fait de sa masse élevée  $m_t$

$$\delta m_H^2|_{\text{quad}} = \frac{3\Lambda^2}{8\pi^2 v^2} (2M_W^2 + M_Z^2 + m_H^2 - 4m_t^2). \quad (1.125)$$

L'idée est la suivante: si l'on considère le SM comme une théorie effective, on voit que la masse carrée du Higgs est quadratiquement sensible à l'échelle  $\Lambda$  à laquelle on coupe les intégrales de boucles, et qui est supposée être celle de la nouvelle physique. Bien sûr, les intégrales exactes devraient couvrir toutes les valeurs des impulsions jusqu'à l'infini, en incluant les particules nouvelles encore inconnues à ce jour<sup>18</sup>. Cependant, la formule (1.125) indique à quel degré la valeur de la masse du Higgs dépend de l'échelle de la nouvelle physique. D'un point de vue strictement technique, on peut demander que la masse nue  $m_0$  soit choisie pour avoir

$$m_H^2 = m_0^2 + \delta m_H^2 \lesssim 250 \text{ GeV}, \quad (1.126)$$

mais alors, si  $m_0^2$  n'était pas exactement ajusté, on retrouverait immédiatement une valeur pour la masse physique  $m_H^2$  qui serait de l'ordre de  $\delta m_H^2$ . Autrement dit, dès que l'échelle de la nouvelle physique dépasse [KM00]

$$\Lambda_{\text{nat}} \sim 4\pi v, \quad (1.127)$$

les corrections radiatives à la masse du Higgs sont plus importantes que la masse elle-même, et que l'échelle électrofaible. Une manière d'éviter la conclusion que la nouvelle physique doit intervenir à l'ordre du TeV serait que la condition de Veltman [Vel81]

$$m_H^2 \simeq 4m_t^2 - 2M_W^2 - M_Z^2, \quad (1.128)$$

soit approximativement vérifiée, auquel cas on doit s'intéresser aux corrections à deux boucles. Le résultat d'une analyse détaillée est que la sensibilité à  $\Lambda$  est effectivement réduite lorsque la relation (1.128) est satisfaite [KM00]. La nouvelle physique peut donc éventuellement apparaître à une échelle plus haute. Notons qu'avec les valeurs expérimentales des masses entrant dans le membre de droite de la condition de Veltman (1.128), c'est-à-dire pour que le SM ait une chance d'être valable jusqu'à des énergies plus grandes que le TeV, on s'attendrait à trouver, avec  $m_t = 174.3 \pm 5.1 \text{ GeV}$  [KM00]

$$195 \text{ GeV} < m_H < 215 \text{ GeV}. \quad (1.129)$$

Nous ne discutons pas les contraintes de trivialité ni de stabilité, qui se trouvent être moins restrictives que les précédentes [KM00].

### 1.6.3.2 Protection du Higgs élémentaire

Il existe à ce jour deux idées viables pour remédier à cette difficulté théorique tout en conservant le mécanisme de Higgs élémentaire et le boson de Higgs physique léger qui décrivent si bien les expériences, comme nous l'avons vu à la section 1.5.

<sup>18</sup>. On peut aussi effectuer une renormalisation, puis envoyer le régulateur ultraviolet  $\Lambda$  (*cut-off*) vers l'infini afin d'obtenir la prédiction du SM seul: la renormalisation sert alors à fixer la valeur des fonctions de Green pour une impulsion donnée. Cette valeur devrait idéalement être fournie par une théorie plus fondamentale, mais la dépendance en impulsion de toutes les fonctions est uniquement donnée par le SM lui-même. Dans cette vision, on peut aussi bien utiliser la régularisation dimensionnelle, dans laquelle les divergences quadratiques sont éliminées dès le début.

La première idée est d'utiliser une symétrie entre bosons et fermions, qui relie les couplages des uns à ceux des autres, et en particulier leurs masses. Le formalisme correspondant, la supersymétrie, correspond à une extension du groupe de Poincaré. Puisque la masse des fermions est protégée de recevoir des corrections radiatives grandes par la symétrie chirale, elle peut être naturellement petite devant l'échelle de la physique nouvelle au-delà des particules supersymétriques. Pour les applications au secteur électrofaible [HK85], on remarque que le spectre des particules connues ne présente pas de dégénérescence de masse entre fermions et bosons, ce qui signifie que la supersymétrie est brisée. L'approche utilisée en pratique est la suivante: on admet dans le lagrangien tous les termes brisant la supersymétrie de façon douce, c'est-à-dire ne réintroduisant pas de divergences quadratiques. On construit donc un lagrangien effectif, avec quantité de paramètres représentant notre ignorance du mécanisme de brisure de supersymétrie. La supersymétrie étant brisée, le problème des corrections radiatives à la masse du Higgs réapparaît dans une certaine mesure, puisque les particules (super-partenaires) responsable des compensations entre divergences quadratiques sont plus lourdes que les particules déjà connues. Leurs masses correspondent alors à l'échelle  $\Lambda$  de la nouvelle physique du point de vue du SM, dont les modèles supersymétriques phénoménologiques sont une extension. On comprend donc que ces super-partenaires des particules connues soient attendus avec des masses d'ordre le TeV, ou inférieures. La nouveauté est que, lorsque l'on inclut ces super-partenaires, la sensibilité quadratique à l'échelle de la nouvelle physique au-delà de quelques TeV disparaît: le modèle peut donc en principe être valable jusqu'à une échelle arbitraire, tout en restant naturel. On a ainsi résolu le problème de hiérarchie du point de vue technique: il reste à expliquer comment les différentes échelles sont générées.

Toutes les extensions supersymétriques du SM nécessitent l'introduction d'au moins deux doublets complexes de Higgs, conduisant à cinq (ou plus) particules scalaires physiques dans le spectre. Une autre particularité de ces modèles est que le boson de Higgs est léger (ce qui était après tout le but initial). Quantitativement, les analyses à l'ordre de deux boucles donnent pour le boson de Higgs neutre et pair sous  $CP$  le plus léger [DHH<sup>+</sup>03]

$$m_H^2 \lesssim 135 \text{ GeV}. \quad (1.130)$$

Une autre possibilité pour protéger la masse du boson de Higgs est d'en faire un PGB: on se place ainsi dès le début dans le cadre d'une théorie effective, cette fois-ci non-découplante. Le doublet complexe est dans ce cas issu d'un multiplet plus grand de GBs. La symétrie globale correspondante, qui protège la masse du Higgs, est brisée explicitement par les interactions de jauge. Ces interactions de jauge doivent elle-mêmes être introduites d'une façon bien précise pour ne pas générer à nouveau des corrections trop importantes à la masse du Higgs. C'est sur ce dernier point qu'à eu lieu le progrès récent, d'abord dans le cadre de modèles *moose* ou de « déconstruction dimensionnelle » (*dimensional deconstruction*) [AHCG01a, CHPW01, AHCG01b, AHCGW02, AH<sup>+</sup>02]. Dans ce cas, la protection des PGBs peut se comprendre en termes de la localité dans la cinquième dimension ou bien, comme nous le verrons à l'annexe H.5.3 [HS04b], de règles de somme du type de celles de Weinberg [Wei67b], comme c'est le cas pour les corrections électromagnétiques à la masse du pion en QCD [DGM<sup>+</sup>67, EGPdR89, Mou97]. Une généralisation, nommée *little Higgs*, ne reposant pas nécessairement sur des diagrammes *moose* a ensuite été exploitée [AHCKN02]. La confrontation avec les tests de précision n'a pas encore été effectuée au même niveau que pour les modèles supersymétriques, mais des comparaisons phénoménologiques apparaissent régulièrement qui vont dans ce sens [CHK<sup>+</sup>03a, HLMW03, KS03, CW03, CHK<sup>+</sup>03b, CD03, CDO03]. Dans ces modèles, les divergences quadratiques sont compensées par d'autres particules de la même statistique, contrairement au cas de la supersymétrie. Une autre différence profonde est que l'échelle de la nouvelle physique ne peut être repoussée que par un facteur de boucle, c'est-à-dire vers quelques dizaines de TeV. Notons que les modèles présentés dans la littérature ne suivent pas toujours la logique des théories effectives, puisqu'un choix particulier des termes est fait, qui implique des hypothèses sur la théorie sous-jacente. En revanche, une première investigation du processus de renormalisation tel qu'il serait fait dans le cadre des théories effectives à la Weinberg discutées au chapitre 2, est parue récemment [KNP04].

## 1.7 Modèles sans particule de Higgs physique

Après avoir exposé les difficultés qui se posent lorsqu’une théorie contient des champs scalaires élémentaires, comme par exemple le boson de Higgs, nous présentons les idées qui ont historiquement mené à l’élaboration du premier modèle sans Higgs. Nous mentionnons aussi les difficultés phénoménologiques que rencontre ce modèle.

Notre objectif dans cette thèse est la formulation d’une théorie effective sans Higgs, par opposition à un modèle. Deux constatations nous poussent à adopter cette approche: les seuls modèles explicites bien maîtrisés du point de vue théorique semblent exclus expérimentalement [HT90, PT92, PDG], ce qui incite à se tourner vers d’autres modèles, de façon plus générale si possible. D’autre part, les modèles sans Higgs sont généralement en interactions fortes à partir d’une échelle  $\Lambda$ , et donc les calculs perturbatifs dans cette région sont proscrits. Le cas d’école de ce type est la QCD à basse énergie (sur laquelle est d’ailleurs basé le modèle original de la technicouleur), pour laquelle le succès de l’approche de théorie effective n’est plus à démontrer.

Notons une différence importante dans notre cas: nous ignorons la théorie sous-jacente, et sommes donc incapables de donner des estimations pour les constantes de basse énergie apparaissant dans le lagrangien effectif, en dehors du modèle de technicouleur minimal et de la limite de Higgs lourd. Ces deux modèles ne constituent cependant que deux cas particuliers de modèles qui peuvent être traités par l’approche des LEETs: celle-ci ne se réduit pas à la limite de Higgs lourd.

Récemment, de nouveaux scénarios pour la brisure électrofaible sans Higgs sont apparues [CGPT03], faisant appel à une dimension supplémentaire et un scénario de type Randall-Sundrum [RS99]. Un des espoirs est que ces modèles se prêtent à un développement perturbatif classique [CGM<sup>+</sup>03, BPR03] jusqu’à une échelle  $\Lambda$  sensiblement plus grande que la valeur habituelle de quelques TeV. Leur statut vis-à-vis des tests de précision n’est cependant pas encore clair [BPR03, CCGT04]. Nous aurons l’occasion de discuter ces modèles, en particulier en connexion avec leur relation à la QCD dans la limite de grand nombre de couleurs, et à la technicouleur [SS03, CNP03, BPR03] aux chapitres 4 et 5.

Nous décrivons brièvement les caractéristiques principales des modèles de technicouleur, nous limitant aux aspects utiles à la suite de notre propos. Pour plus de détails, voir [Chi98, Hab01, Lan02b, HS03].

### 1.7.1 Liberté asymptotique et naturalité

La motivation originale pour introduire un secteur de brisure électrofaible basé sur des interactions de jauge entre des fermions (appelés techni-fermions par opposition aux fermions expérimentalement observés) est la suivante: il se trouve que les théories de jauge asymptotiquement libres permettent d’obtenir une hiérarchie importante de façon naturelle entre l’échelle de la physique considérée et celle de la nouvelle physique [Sus79]. En effet, dans les théories asymptotiquement libres, l’évolution du couplage de jauge  $g$  lors d’un changement d’échelle de renormalisation  $\mu$  est donnée par

$$\mu \frac{d g}{d \mu} = -b g^3 + \mathcal{O}(g^5), \quad (1.131)$$

avec l’inégalité cruciale responsable de la liberté asymptotique [GW73b, Pol73, GW73a]

$$b > 0, \quad (1.132)$$

responsable du fait que la constante de couplage croît lorsque l’échelle  $\mu$  est envoyée vers le domaine infrarouge. D’après notre compréhension actuelle, de telles théories vont ainsi générer des masses de l’ordre de l’échelle  $\Lambda_{\text{IR}}$  à laquelle le couplage  $g$  diverge, comme c’est le cas en QCD. Définissant  $g_0$  à l’échelle  $\Lambda$

$$g^2(\Lambda) = g_0^2, \quad (1.133)$$

l’équation différentielle approchée (1.131) donne en première estimation

$$\frac{\Lambda_{\text{IR}}}{\Lambda} \sim e^{-\frac{1}{2bg_0^2}}. \quad (1.134)$$



Prenant le cas d'une théorie de Yang-Mills  $SU(3)$  pure, on a  $b = 11/(16\pi^2)$ , ce qui permet d'obtenir avec  $g_0^2 \sim 0.2$ , c'est-à-dire sans ajustement très fin, une hiérarchie de l'ordre de  $10^{-19}$  entre l'échelle de Planck  $M_{Pl} \simeq 10^{19}$  GeV et la masse du proton. De plus, la hiérarchie

$$\Lambda_{IR} \ll \Lambda, \quad (1.135)$$

est préservée si l'on considère des petites variations de la constante  $g_0$ , tandis que nous avons vu auparavant que, si l'on demandait  $m_H^2 \ll \Lambda^2$ , alors  $m_H^2$  devenait très sensible à la valeur de  $m_0^2$ .

### 1.7.2 L'exemple de la QCD

La question est à présent de savoir comment une telle théorie peut donner leurs masses aux  $W^\pm$  et  $Z^0$ . Pour comprendre ceci, nous considérons le cas de la QCD avec deux saveurs de fermions de masses nulles. Le lagrangien de la théorie de Yang-Mills est

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \langle \mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu} \rangle + i \sum_{q=u,d} \bar{q} \gamma^\mu D_\mu q, \quad (1.136)$$

où la dérivée covariante agit de façon vectorielle dans l'espace de couleur (notons qu'à ce stade nous ne considérons pas les interactions faibles, qui peuvent être introduites comme des perturbations)

$$D_\mu q = D_\mu \begin{pmatrix} q^r \\ q^g \\ q^b \end{pmatrix} = (\partial_\mu - i g_s \mathcal{G}_\mu) \begin{pmatrix} q^r \\ q^g \\ q^b \end{pmatrix}. \quad (1.137)$$

On voit que le lagrangien est invariant sous des transformations globales formant un groupe  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$  qui agit dans l'espace des saveurs, distinguant entre les deux chiralités

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \mapsto e^{-i\frac{\alpha^0}{2}} V_L \Psi_L, \quad (1.138)$$

$$\Psi_R = \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} \mapsto e^{-i\frac{\alpha^0}{2}} V_R \Psi_R, \quad (1.139)$$

avec  $(V_L, V_R) \in SU(2)_L \times SU(2)_R$  et  $\alpha^0$  une phase agissant simultanément sur les deux chiralités. Rappelons le sort de la symétrie  $U(1)_A$ : bien que le lagrangien (1.136) soit invariant sous les transformations

$$\Psi_L \mapsto e^{i\frac{\beta^0}{2}} \Psi_L, \quad (1.140)$$

$$\Psi_R \mapsto e^{-i\frac{\beta^0}{2}} \Psi_R, \quad (1.141)$$

cette symétrie n'est plus valable au niveau quantique. En effet, le courant de Noether associé n'est pas conservé

$$\partial_\mu \{ \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \Psi \} = \frac{3}{16\pi^2} g^2 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \langle \mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}_{\rho\sigma} \rangle. \quad (1.142)$$

Les courants vectoriels et axiaux donnés par les expressions

$$J_{V\mu}^0 = \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{1}{2} \Psi, \quad (1.143)$$

$$J_{V\mu}^a = \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} \Psi, \quad (1.144)$$

$$J_{A\mu}^a = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \Psi, \quad (1.145)$$

sont, quant à eux, conservés

$$\partial_\mu J_{V\mu}^{0\mu} = 0, \quad (1.146)$$

$$\partial_\mu J_{V\mu}^{a\mu} = 0, \quad (1.147)$$

$$\partial_\mu J_{A\mu}^{a\mu} = 0. \quad (1.148)$$

En QCD avec deux saveurs de masse nulle, la symétrie chirale  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$  est brisée vers son sous-groupe vectoriel, du fait du vide choisi par la théorie. Le vide n'est donc pas invariant sous les transformations générées par les charges axiales, et le spectre contient donc trois GBs qui se couplent aux courants axiaux (pour plus de détails, voir section 2.1.1)

$$\langle 0 | A_\mu^a(0) | \pi^b(p) \rangle = i \delta^{ab} f_0 p_\mu. \quad (1.149)$$

Ceci est à comparer avec (1.60) qui concernait le cas abélien, et permettra donc de donner des masses à trois bosons vecteurs grâce au mécanisme de Higgs, étendant l'idée de la section 1.3.1 au cas non-abélien. Notons que, du fait de la symétrie vectorielle restante  $SU(2)_{L+R}$ , les trois GBs sont couplés au vide *via* une constante de désintégration unique  $f_0$ : ils forment un triplet.

La démonstration théorique que cette brisure de symétrie a lieu ne s'applique que dans le cas de trois saveurs ou plus [tH79a, CG82, FSBY81]. Malgré cela, la phénoménologie hadronique confirme bien que cela reste vrai dans le cas de deux saveurs (y compris avec des masses de quarks non-nulles, ce qui n'est pas notre propos). Notons par ailleurs qu'une autre conséquence de la dynamique non-perturbative de la QCD à basse énergie est notre incapacité à calculer la constante de désintégration  $f_0$  à partir de l'échelle  $\Lambda_{\text{IR}}$  à laquelle le couplage de jauge diverge.

### 1.7.3 Technicouleur: idée générale

A partir de la description précédente, on obtient une réalisation du mécanisme de Higgs sans scalaires fondamentaux [JJ73, Wei73c, CN73, Wei79a, Sus79]. Nous avons introduit ci-dessus la symétrie chirale de la QCD dans la limite où les quarks  $u$  et  $d$  sont sans masse. Si l'on considère maintenant leurs interactions électrofaibles, on constate que les charges sous  $SU(2)_w \times U(1)_Y$  rassemblées au tableaux 1.1 et 1.2 (pages 21 et 22) impliquent les interactions suivantes entre les courants de Noether introduits en (1.143-1.145) et les bosons de jauge

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{g}{2} (V_\mu^a - A_\mu^a) W^{a\mu} + \frac{g'}{2} \left( \frac{1}{3} V_\mu^0 + V_\mu^3 + A_\mu^3 \right) b^\mu, \quad (1.150)$$

si bien que l'on trouve, en utilisant le couplage des GBs aux courants axiaux (1.149) et le raisonnement de la section 1.3.1, la même matrice de masse (1.92) que dans le cas du mécanisme de Higgs élémentaire, excepté que la valeur dans le vide  $v$  du champ de Higgs est remplacée par la constante de désintégration  $f_0$  des pions. La diagonalisation du terme de masse est strictement identique à celle du SM, donnée à la section 1.2.1.1. Cependant, l'échelle de masse n'est pas du tout la même puisque l'on a

$$M_W^2 = \frac{g^2}{4} f_0^2, \quad (1.151)$$

$$M_Z^2 = \frac{g^2 + g'^2}{4} f_0^2, \quad (1.152)$$

avec

$$f_0 \simeq 93 \text{ MeV}. \quad (1.153)$$

Puisque l'échelle de masse n'est pas la bonne, on doit imaginer une version donnant la bonne échelle

$$f \simeq 246 \text{ GeV}, \quad (1.154)$$

et éventuellement basée sur un groupe de jauge  $SU(N_{\text{TC}})$  au lieu de  $SU(3)$ . Un tel modèle permettrait d'obtenir les bonnes valeurs numériques pour les masses des bosons vecteurs, sans avoir de bosons de Higgs restant dans le spectre: la brisure de la symétrie chirale selon  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V \longrightarrow SU(2)_{L+R} \times U(1)_V$  ne produit pas de scalaire restant dans le spectre, mais uniquement les trois GBs qui disparaissent du spectre. Les autres particules composites produites par la technicouleur auront des masses d'ordre  $\Lambda_{\text{IR}}$ , comme déjà mentionné plus haut.

Une telle vision d'un secteur de brisure basé sur une théorie identique à la QCD, avec uniquement une échelle différente semble cependant être exclue expérimentalement. Nous reviendrons sur ce point à l'annexe C, après avoir développé le formalisme des LEETs au chapitre 2. Nous donnerons de plus au chapitre 6 un argument théorique qui exclut certains modèles de type technicouleur comme modèle possible d'EWSB sans Higgs, en fonction de la présence d'anomalies. La difficulté est alors de savoir si les estimations tirées de l'analogie avec la QCD (qui sont à la base de l'exclusion expérimentale de ces modèles) sont encore valables pour les modèles non-anomaux.

Notons que, historiquement, la technicouleur n'a pas été exclue aussi rapidement, si bien que le modèle a été développé plus avant afin de prendre en compte le secteur fermionique: on a besoin pour cela de considérer la technicouleur étendue [DS79, EL80]. Celle-ci permet de rendre compte des masses des fermions en introduisant des interactions de jauge entre les fermions usuels et les techni-fermions. La difficulté est que ceci introduit en général des FCNCs à un niveau inacceptable. Ces difficultés ont conduit à l'élaboration d'autres modèles, que nous ne décrivons pas: l'idée de *walking technicolor* [Hol81, Hol85, AKW86, AW87], ainsi que celle de technicouleur assistée par *topcolor* [Hil95]. Remarquons que dans ces deux derniers cas, l'argument permettant d'exclure la technicouleur simple ne s'applique pas <sup>19</sup>.

Etant donné que le sujet de cette thèse est la construction d'une théorie effective et non de modèles spécifiques, nous arrêtons ici cette discussion.

## 1.8 Résumé

La logique qui préside à la construction du SM est celle de renormalisabilité. Dans le cas des bosons vecteurs, ceci entraîne l'utilisation du principe d'invariance sous les transformations de jauge locales. Ce principe d'invariance représente la seule façon connue de restreindre les termes permis afin de réaliser l'objectif de renormalisabilité. Un des écueils est que la théorie de jauge semble interdire les masses des bosons vecteurs (et celle des fermions chiraux). Ceci est en conflit flagrant avec l'expérience. Il existe un moyen de résoudre ce paradoxe, à l'aide du mécanisme de Higgs élémentaire: un doublet scalaire complexe est introduit dans la théorie, avec des propriétés de transformation appropriées et un potentiel bien choisi. En particulier, le signe de la masse carrée doit être négatif. Ceci a pour conséquence que la configuration dans laquelle les champs sont nuls n'est alors plus l'état fondamental de la théorie. L'état fondamental sélectionné, lui, n'est pas invariant sous la symétrie. Le lagrangien, lui, possède bien cette invariance, ce qui garantit sa renormalisabilité. On dit parfois que la symétrie est spontanément brisée. Le mécanisme de Higgs résulte en la disparition des GBs correspondant à cette brisure, au profit des polarisations longitudinales des trois bosons vecteurs  $W^\pm$  et  $Z^0$ , lesquels acquièrent donc une masse. Il reste dans le spectre une particule scalaire neutre avec une masse libre: le boson de Higgs.

Il est à noter que le mécanisme de Higgs élémentaire permet également de donner des masses indépendantes à chacun des fermions. Le couplage du boson de Higgs à ces fermions est proportionnel à ces masses. Le SM permet de rendre compte d'un nombre impressionnant d'expériences. En effet, nous avons vu que les interactions de courants chargés introduisaient la violation de saveur pour les quarks, tandis que la saveur était conservée avec un grand degré de précision dans les interactions de courants neutres, et que les expériences n'avaient jusqu'à présent pas décelé de failles dans la description de ces phénomènes par le SM. De même, la violation de  $CP$  observée dans les expériences semble être bien expliquée par l'unique phase apparaissant dans la matrice CKM.

Le SM ne permet cependant pas d'expliquer tous les phénomènes connus, mais nécessiterait pour cela d'être étendu. On a mentionné la question de l'asymétrie baryonique, pour laquelle la violation de  $CP$  présente dans le SM est insuffisante. Par ailleurs, l'existence de faibles masses pour les neutrinos, bien qu'elles puissent être accommodées avec une extension bénigne du SM, semblent montrer qu'il existe une échelle de masse plusieurs ordres de grandeurs au-dessus de l'échelle électrofaible. On connaît également une autre échelle: la masse de Planck, à partir de laquelle les effets de la gravitation vont se faire sentir au niveau quantique.

La présence d'échelles de masse au-delà du SM implique que ce dernier est une théorie effective, qui doit être complétée à haute énergie. Le problème de hiérarchie se pose alors: comment l'échelle électrofaible, en particulier la masse du boson de Higgs, peut-elle être stabilisée vis-à-vis des corrections radiatives qui ont tendance à l'amener vers l'échelle de la nouvelle physique?

---

19. Par exemple, le modèle de *walking technicolor* se comporte, de par sa définition même, différemment de la QCD. On ne peut donc se servir de nos connaissances sur cette dernière pour évaluer les observables en *walking technicolor*.

Une réponse possible à laquelle nous nous intéressons ici consiste à se débarrasser du boson de Higgs. Dans ce cas, le problème de la naturalité du scalaire disparaît complètement. Cette idée a originellement été introduite sous une forme analogue à ce qui se passe en QCD: la hiérarchie entre l'échelle électrofaible et celle d'une théorie plus fondamentale est alors naturellement produite par l'évolution d'un couplage de Yang-Mills qui diverge à l'échelle électrofaible. Le modèle de technicouleur minimal semble cependant expérimentalement exclu par les mesures de précision électrofaibles. Nous nous orientons donc vers une approche effective basée sur les symétries connues ou bien supposées de la théorie sous-jacente. Les principes qui régissent la construction d'une telle théorie effective sont le sujet du chapitre 2.



# Chapitre 2

## Théories effectives non-découplantes

Indépendamment des idées théoriques mentionnées au chapitre précédent, il paraît souhaitable d'étudier le cas où le mécanisme de Higgs n'est pas réalisé à l'aide d'un scalaire élémentaire, pour la simple raison que nous ne sommes pas capables, à l'heure actuelle, d'exclure un tel scénario à partir des expériences. En effet, la possibilité de comparer les modèles sans particule de Higgs aux résultats expérimentaux fait toujours défaut. On souhaite décrire une telle situation dans le cadre d'une théorie effective, avec l'idée de paramétrer les expériences dans le secteur électrofaible indépendamment du SM. Les premières tentatives en ce sens [PT90, PT92] utilisaient toujours comme point de départ le SM avec une référence à une masse donnée pour le boson de Higgs physique. D'autres approches ont également été développées, cherchant à s'affranchir de cette référence au SM [HT90, GR91, AB91, DEH91, EH92, BGK<sup>+</sup>94, NS00]: une approche cohérente doit en effet intégrer une procédure de renormalisation bien définie et propre à la théorie alternative proposée au lieu d'être formulée en tant que correction au SM [CGJZ00]. En particulier, on peut définir les corrections obliques en termes d'observables [SCW98], évitant ainsi les écueils tels que la non-invariance de jauge [PT92], ou bien, dans le cadre des théories effectives, le fait que différentes bases d'opérateurs soient équivalentes [NS00]. On cherche ainsi en particulier à avoir une interprétation des mesures électrofaibles alternative à la paramétrisation en termes de la masse du boson de Higgs, décrite à la section 1.5.3.1.

Nous nous proposons ici de formuler cette question dans le cadre des théories effectives telles qu'elles ont été introduites par Weinberg [Wei79c]. Avant d'appliquer ces théories effectives au cas électrofaible, nous nous attachons dans ce chapitre à décrire les principes de base qui régissent leur application au domaine de la QCD à basse énergie: la  $\chi$ PT [GL84, GL85], suivant [Kne96, DG00, Sch02]. L'inclusion de champs dynamiques autres que les GBs est ensuite décrite: champs vectoriels en tant que champs de jauge, et également fermions chiraux. Nous précisons le rôle et l'importance de la formule de comptage de Weinberg pour la cohérence du développement: le comptage de puissances pour les différents objets entrant dans le lagrangien effectif doit permettre d'obtenir cette formule, qui garantit à son tour la validité du développement de la LEET. La construction du lagrangien effectif consiste alors en l'écriture de tous les opérateurs invariants sous les symétries du problème, ordonnés suivant le comptage de puissances. Les LECs apparaissant en facteur des opérateurs sont inconnues: leurs valeurs dépendent de la théorie sous-jacente.

Rappelons que, dans le cas de la  $\chi$ PT, les valeurs des LECs sont extraites des expériences de physique hadronique, et sont donc caractéristiques de la QCD. D'autres modèles donneraient des valeurs différentes pour ces LECs. Considérant l'exemple analytiquement calculable de la limite de masse lourde du modèle sigma-linéaire, on obtient à l'ordre dominant le modèle sigma non-linéaire. Poussant l'analyse au-delà de cet ordre dominant, on constaterait que ce modèle particulier ne reproduit pas les valeurs des LECs trouvées en  $\chi$ PT pour décrire les interactions fortes [GL84, GL85]: la LEET ne se réduit pas à ce modèle particulier. De la même manière, la LEET pour le secteur électrofaible sans boson de Higgs physique ne se réduira pas au cas particulier du SM dans la limite  $m_H \rightarrow \infty$ .

### 2.1 La QCD à basse énergie

Cette section discute les propriétés de symétrie de la QCD à deux saveurs de quarks de masse nulle, et leurs premières conséquences pour la physique à basse énergie, dues au théorème de Goldstone.

### 2.1.1 Symétrie chirale

Nous avons déjà introduit le lagrangien de la QCD en (1.136), ainsi que ses symétries (globales)  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_B$  dans la limite chirale (masse de quarks nulles). On utilise la notation suivante pour le doublet de quarks

$$\Psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

et ses deux projections de chiralité définie

$$\Psi_{L,R} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \Psi. \quad (2.2)$$

La dérivée covariante sous les transformations du groupe  $SU(3)_c$  couple le champ des gluons  $\mathcal{G}_\mu$  aux quarks selon

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu - i g_s \mathcal{G}_\mu \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}) \Psi, \quad (2.3)$$

et le lagrangien (1.136) prend la forme

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \langle \mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu} \rangle + i \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi. \quad (2.4)$$

Nous avons également défini les courants de Noether (conservés du fait des symétries) sous la combinaison vectorielle et axiale (1.143-1.145), qui permet d'identifier le couplage des pions aux courants axiaux. Pour la suite, nous utiliserons plus fréquemment les combinaisons linéaires suivantes

$$J_{V\mu}^0 = \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{1}{2} \Psi, \quad (2.5)$$

$$J_R^{a\mu} = \frac{J_V^{a\mu} + J_A^{a\mu}}{2} = \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} \Psi_R. \quad (2.6)$$

$$J_L^{a\mu} = \frac{J_V^{a\mu} - J_A^{a\mu}}{2} = \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} \Psi_L, \quad (2.7)$$

également conservées dans la limite chirale

$$\partial_\mu J_{V\mu}^{0\mu} = 0, \quad (2.8)$$

$$\partial_\mu J_R^{a\mu} = 0, \quad (2.9)$$

$$\partial_\mu J_L^{a\mu} = 0. \quad (2.10)$$

On peut également définir les charges correspondantes, qui seront indépendantes du temps, en vertu du théorème de Noether

$$Q_V^0 = \int d\vec{x} J_V^{00}(t, \vec{x}), \quad (2.11)$$

$$Q_R^a = \int d\vec{x} J_R^{a0}(t, \vec{x}), \quad (2.12)$$

$$Q_L^a = \int d\vec{x} J_L^{a0}(t, \vec{x}), \quad (2.13)$$

pour reconnaître les relations de commutation de l'algèbre de  $SU(2) \times SU(2)$

$$[Q_R^a, Q_R^b] = i \varepsilon^{abc} Q_R^c, \quad (2.14)$$

$$[Q_L^a, Q_L^b] = i \varepsilon^{abc} Q_L^c, \quad (2.15)$$

$$[Q_R^a, Q_L^b] = 0. \quad (2.16)$$

Par souci de clarté, précisons qu'en termes des charges vectorielles et axiales

$$Q_V^a = Q_R^a + Q_L^a, \quad (2.17)$$

$$Q_A^a = Q_R^a - Q_L^a, \quad (2.18)$$

on aura

$$[Q_V^a, Q_V^b] = i\epsilon^{abc} Q_V^c, \quad (2.19)$$

$$[Q_A^a, Q_A^b] = i\epsilon^{abc} Q_V^c, \quad (2.20)$$

$$[Q_V^a, Q_A^b] = i\epsilon^{abc} Q_A^c. \quad (2.21)$$

Dans le cas de la QCD, on sait que la symétrie chirale est spontanément brisée vers son sous-groupe vectoriel, c'est-à-dire que le vide est annihilé par les charges vectorielles

$$Q_V^0|0\rangle = 0, \quad (2.22)$$

$$Q_V^a|0\rangle = 0, \quad (2.23)$$

mais n'est pas invariant sous les transformations axiales

$$Q_A^a|0\rangle \neq 0. \quad (2.24)$$

Dans d'autre cas où l'on ne connaît pas le lagrangien en termes des champs fondamentaux, on sera amené à supposer que cette brisure a lieu. Le principe de construction du lagrangien effectif est identique dans ces différents cas, puisqu'il est basé sur les symétries, et ne fait pas entrer en jeu les détails de la dynamique à haute énergie de la théorie sous-jacente. Les différents modèles (QCD, technicouleur ou autre) se caractériseront cependant par les valeurs des différentes constantes apparaissant en facteur des opérateurs dans le lagrangien effectif. En revanche, les opérateurs seront les mêmes, puisqu'on doit inclure tous ceux qui sont permis par les symétries.

Le théorème de Goldstone [Nam60, NJL61a, NJL61b, Gol61, GSW62] nous dit que la théorie produit un mode scalaire de masse nulle par générateur de symétrie qui ne laisse pas invariant le vide. Explicitement, on a, comme déjà écrit en (1.149), trois GBs  $\{\pi^a | a = 1, 2, 3\}$

$$\langle 0 | A_\mu^a(0) | \pi^b(p) \rangle = i\delta^{ab} f_0 p_\mu. \quad (2.25)$$

Rappelons que le fait d'avoir l'équation (2.25) avec

$$f_0 \neq 0, \quad (2.26)$$

est précisément équivalent à l'affirmation que la symétrie est brisée spontanément: c'est là un critère nécessaire et suffisant. En général, on s'attend dans ce cas à trouver des paramètres d'ordre non-nuls correspondants à cette brisure spontanée. L'opérateur de plus basse dimension que l'on puisse imaginer et qui se transforme selon une représentation du groupe chirale qui ne contienne pas la représentation triviale dans sa décomposition est  $\bar{\Psi}\Psi$  dans le cas de la QCD. Toujours en QCD, il semble bien que le paramètre d'ordre correspondant soit non-nul

$$\langle 0 | \bar{\Psi}\Psi | 0 \rangle \neq 0. \quad (2.27)$$

En revanche, ceci n'est pas général: la brisure de symétrie n'implique pas que tous les paramètres d'ordre soient différents de zéro.

Par contre, notons que si une théorie présente la brisure de symétrie chirale, soit (2.26), alors on connaît immédiatement un paramètre d'ordre différent de zéro et qui se trouve être non-local. Il s'agit de la fonction à deux points gauche-droite

$$\begin{aligned} \delta^{ab} \Pi_{\mu\nu}(q) &\equiv 4i \int dx e^{iq \cdot x} \langle 0 | T J_{L\mu}^a(x) J_{R\nu}^b(0) | 0 \rangle \\ &= i \int dx e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ J_{V\mu}^a(x) J_{V\nu}^b(0) - J_{A\mu}^a(x) J_{A\nu}^b(0) \} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Sachant que les courants sont conservés (2.6-2.7), on peut extraire la structure de Lorentz de cette fonction à deux points selon

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q_\mu q_\nu - \eta_{\mu\nu} q^2) \Pi_{LR}(-q^2). \quad (2.29)$$

Etant donnée le couplage des GBs aux courants axiaux (2.25), on reconnaît bien le fait que  $f_0$  correspond à la valeur d'un paramètre d'ordre

$$\lim_{Q^2 \rightarrow +\infty} Q^2 \Pi_{LR}(Q^2) = -f_0^2. \quad (2.30)$$



### 2.1.2 Idées de bases de la théorie effective

La QCD est une théorie asymptotiquement libre à haute énergie. A l'autre extrémité de l'échelle des énergies, l'évolution *via* le groupe de renormalisation fait diverger le couplage de jauge. Ainsi, en dessous d'une échelle d'environ 1 GeV, la théorie de perturbation devient inapplicable: quarks et gluons ne sont plus des degrés de liberté adaptés. On entre dans le domaine non-perturbatif. Pour remédier à cela, on peut considérer comme degrés de liberté les états physiques légers: les mésons pseudo-scalaires  $\pi$ . En particulier, nous venons de voir à la section 2.1.1 que, dans la limite chirale, le spectre comportait trois états de masse nulle: les GBs. Ces états sont identifiés aux pions de la QCD. Puisqu'ils sont les seuls états protégés par la symétrie chirale, on va pouvoir bâtir une approximation de la physique à basse énergie en considérant uniquement les trois GBs comme degrés de liberté dynamiques. Si l'on étudie des processus mettant en jeu des énergies inférieures aux masses des résonances les plus légères, ces dernières ne seront jamais produites dans les états finaux. Dans ce domaine d'énergie limité, on peut donc construire une théorie effective ne comportant pas explicitement les états massifs.

L'idée est qu'en construisant le lagrangien le plus général respectant les symétries de la théorie, on ne fait qu'écrire les interactions les plus générales satisfaisant aux contraintes d'unitarité, d'analyticité, de la symétrie de croisement ainsi qu'au *cluster decomposition principle* [Wei79c]. Nous verrons à la section 2.3 que la théorie effective correspondante prendra la forme d'une théorie des champs avec procédure de renormalisation, permettant d'améliorer systématiquement la précision en poussant les calculs à l'ordre suivant. L'ingrédient crucial permettant d'élaborer un tel développement est le suivant: il s'agit du fait que les GBs interagissent faiblement à basse énergie. Le développement se fera donc en puissance des impulsions (c'est-à-dire, au niveau du lagrangien, en puissance des dérivées). Nous verrons plus tard (section 2.3.1.2) que ce développement est lié au développement en boucles.

### 2.1.3 Réalisation non-linéaire de la symétrie et GBs

Pour le moment, nous cherchons à établir les propriétés de transformation des champs de Goldstone sous la symétrie chirale, suivant [CWZ69, CCWZ69, Leu94, Sch02]. On part du fait que l'action d'un groupe de symétrie  $G$  sur le vecteur des champs  $\Phi \in \mathbb{R}^3$  (qui décrit les trois GBs) doit reproduire la loi de transformation du groupe: l'application  $\varphi$  de  $G \times \mathbb{R}^3$  vers  $\mathbb{R}^3$  est un homomorphisme pour  $G$ , soit

$$\varphi(g_2, \varphi(g_1, \Phi)) = \varphi(g_2 g_1, \Phi), \quad (2.31)$$

pour tout  $(g_1, g_2) \in G^2$ .  $\varphi$  est une réalisation de la symétrie sur les champs, qui est *a priori* non-linéaire: on a, pour un scalaire  $\lambda$  générique  $\varphi(g_1, \lambda \Phi) \neq \lambda \varphi(g_1, \Phi)$ . Si  $H$  est le sous-groupe laissant le vide (l'origine des champs  $\Phi = 0$ ) invariant, on peut montrer que l'action de  $\varphi$  doit fournir une représentation de ce sous-groupe: dans ce cas, l'action est linéaire en les champs  $\varphi(h, \lambda \Phi) = \lambda \varphi(h, \Phi)$ , pour tout  $h \in H$  (soit  $h$  tel que  $\varphi(h, 0) = \varphi(1, 0)$ ). On peut de plus établir un isomorphisme entre les champs de Goldstone et les éléments du quotient  $G/H$ , la classe d'équivalence de  $g_1$  étant définie par

$$g_1 H = \{g_1 h | h \in H\}. \quad (2.32)$$

En effet, à chaque élément de  $G/H$  correspond une unique image dans  $\mathbb{R}^3$ , puisque

$$\varphi(g_1 h, 0) = \varphi(g_1, 0). \quad (2.33)$$

Réciproquement, si l'on a  $\varphi(g_1, 0) = \varphi(g_2, 0)$ , alors  $g_1 g_2^{-1} \in H$ , et donc  $g_1$  et  $g_2$  appartiennent à la même classe d'équivalence

$$g_1 H = g_2 H. \quad (2.34)$$

L'effet d'une transformation appartenant à  $G$  est donné par (2.31). On peut à présent l'utiliser dans le cas particulier  $\Phi = 0$  pour déterminer la loi de transformation des champs de Goldstone, puisque ces derniers sont identifiés aux éléments de  $G/H$ .

Appliquons ce traitement général au cas de la brisure  $SU(2)_L \times SU(2)_R \longrightarrow SU(2)_{L+R}$  où  $G = \{(L, R) | L \in SU(2), R \in SU(2)\}$  et  $H = \{(V, V) | V \in SU(2)\}$ . La classe d'équivalence de  $\tilde{g} = (\tilde{L}, \tilde{R}) \in G$  est alors  $\tilde{g}H = \{(\tilde{L}V, \tilde{R}V) | V \in SU(2)\}$ . Si l'on choisit d'utiliser comme représentant de la classe d'équivalence l'élément  $\tilde{g}'$  pour lequel la matrice de droite égale à l'unité, on écrira

$$\tilde{g}H = \tilde{g}'H, \quad (2.35)$$

avec  $V = \tilde{R}^\dagger$ , ce qui donne

$$\tilde{g}' = (\tilde{L}\tilde{R}^\dagger, \mathbb{1}_{2 \times 2}). \quad (2.36)$$

Grâce à l'isomorphisme précédent, on peut choisir de paramétrer les GBs par la matrice  $\Sigma$

$$\Sigma \equiv \tilde{L}\tilde{R}^\dagger. \quad (2.37)$$

On lit alors directement la loi de transformation de  $\Sigma \in SU(2)$  sous  $G$ , qui est celle que nous utiliserons dans toute la suite

$$\Sigma \xrightarrow{G} L\Sigma R^\dagger, \quad (2.38)$$

puisque, pour une transformation  $g = (L, R) \in SU(2) \times SU(2)$ , on a

$$g\tilde{g}H = g\tilde{g}'H = g'H, \quad (2.39)$$

avec

$$g' = (L(\tilde{L}\tilde{R}^\dagger)R^\dagger, \mathbb{1}_{2 \times 2}). \quad (2.40)$$

En conclusion, on pourra décrire les champs de Goldstone par une matrice complexe  $\Sigma(x) \in SU(2)$ . La symétrie  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  agit alors selon (2.38). On peut paramétrer cette matrice selon

$$\Sigma = e^{-i\pi^a(x)\frac{\tau^a}{f_0}}, \quad (2.41)$$

où les trois champs réels  $\pi^a$  sont les champs de Goldstone et  $f_0$ , qui sera identifiée en (2.76) comme étant leur constante de désintégration (seule constante de dimension physique égale à un à notre disposition à ce stade). L'adoption d'une autre définition est toujours possible, mais ne modifiera pas la matrice  $S$  [CWZ69, CCWZ69].

Par ailleurs, on vérifie bien que le vide ( $\Sigma = \mathbb{1}_{2 \times 2}$ ) est effectivement invariant sous  $H$ , et que les transformations des champs  $\pi^a$  sont linéaires sous  $H$

$$\pi^a \tau^a \xrightarrow{H} V(\pi^a \tau^a)V^\dagger. \quad (2.42)$$

Pour construire le lagrangien effectif, on utilisera ces variables, et on devra respecter la symétrie  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ . Le formalisme de cette section est suffisant pour cela. Cependant, si l'on souhaite décrire les fonctions de Green des courants de symétrie (2.5-2.7) de la théorie, on doit introduire en plus les sources correspondantes. Avant de décrire la construction du lagrangien effectif, nous faisons donc un détour par la fonctionnelle génératrice de la QCD à deux saveurs de masse nulle.

## 2.2 Identités de Ward

Cette section présente une discussion des contraintes que doit satisfaire le lagrangien effectif pour reproduire les relations dérivées des propriétés de symétries mentionnées en 2.1.1. La discussion est volontairement limitée, dans le sens où nous omettons la possibilité d'avoir des anomalies modifiant les identités de Ward. Les anomalies seront traitées en détail au chapitre 6.

## 2.2.1 Dans la théorie fondamentale

Les identités de Ward expriment les symétries de la théorie au niveau des fonctions de Green des courants de Noether (2.5-2.7), impliquant des relations entre ces fonctions de Green. Pour extraire ces dernières, on ajoute des termes de sources au lagrangien de la QCD en définissant

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}+\text{sources}} = \mathcal{L} + J_L^{a\mu}(x) L_\mu^a(x) + J_R^{a\mu}(x) R_\mu^a(x) + V^{0\mu}(x) B_\mu^0(x), \quad (2.43)$$

où les courants utilisés sont ceux définis en (2.5-2.7), et les sept sources  $L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0$  sont des objets classiques. On définit la fonctionnelle génératrice  $\Gamma[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]$  par

$$e^{i\Gamma[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]} = \int d[\mathcal{G}_\mu^a] d[\Psi] e^{i\int dx \mathcal{L}_{\text{QCD}+\text{sources}}}. \quad (2.44)$$

En prenant des dérivées fonctionnelles par rapport aux sources, puis mettant les sources à zéro, on obtiendra les fonctions de Green connexes des courants de symétrie de la QCD: par exemple

$$\left. \frac{\delta^2 \Gamma[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]}{\delta L_\mu^a(x) \delta R_\nu^b(0)} \right|_{L_\mu^a=0, R_\mu^a=0, B_\mu^0=0} = +i \left\langle 0 \left| T J_L^{a\mu}(x) J_R^{b\nu}(0) \right| 0 \right\rangle. \quad (2.45)$$

A partir de l'expression de la fonctionnelle génératrice (2.44), on peut dériver les identités de Ward: en considérant une version locale des transformations de symétrie des champs dynamiques [Col84], on obtient ainsi en l'absence d'anomalies

$$0 = \partial_\mu \frac{\delta \Gamma[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]}{\delta L_\mu^a(x)} + \varepsilon^{abc} L_\mu^b(x) \frac{\delta \Gamma[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]}{\delta L_\mu^c(x)}, \quad (2.46)$$

$$0 = \partial_\mu \frac{\delta \Gamma[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]}{\delta R_\mu^a(x)} + \varepsilon^{abc} R_\mu^b(x) \frac{\delta \Gamma[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]}{\delta R_\mu^c(x)}, \quad (2.47)$$

$$0 = \partial_\mu \frac{\delta \Gamma[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]}{\delta B_\mu^0}. \quad (2.48)$$

De ces trois équations, on peut obtenir les identités de Ward par application répétée de la dérivée fonctionnelle et en posant ensuite les sources égales à zéro.

On peut également interpréter les équations (2.46-2.48) d'une autre manière: elles expriment le fait que la fonctionnelle génératrice  $\Gamma[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]$  est invariante si l'on applique les transformations suivantes aux sources

$$L_\mu(x) \mapsto L(x) L_\mu(x) L(x)^\dagger + i L(x) \partial_\mu L(x)^\dagger, \quad (2.49)$$

$$R_\mu(x) \mapsto R(x) R_\mu(x) R(x)^\dagger + i R(x) \partial_\mu R(x)^\dagger, \quad (2.50)$$

$$B_\mu^0(x) \mapsto B_\mu^0(x) - \partial_\mu \alpha^0(x), \quad (2.51)$$

où les transformations  $L, R, \alpha^0$  de  $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R \times \text{U}(1)_V$  ont été promues au rang de fonctions de la variable  $x$  selon

$$L \longrightarrow L(x), \quad (2.52)$$

$$R \longrightarrow R(x), \quad (2.53)$$

$$\alpha^0 \longrightarrow \alpha^0(x). \quad (2.54)$$

Ainsi, le fait de considérer les fonctions de Green des courants de Noether, et donc de travailler hors de la couche de masse, nous a amenés à considérer une version locale du groupe de transformation. On trouve que les identités de Ward (non-anomales) sont équivalentes au fait que la fonctionnelle génératrice  $\Gamma[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]$  soit invariante sous ces transformations locales <sup>1</sup>.

1. On utilisera indifféremment les expressions « invariance locale » et « invariance de jauge ». Lorsqu'il sera nécessaire de préciser que la connexion intervenant dans la dérivée covariante est une variable d'intégration, on parlera de champs « dynamiques ».

### 2.2.2 Dans la théorie effective

On cherche à reproduire la fonctionnelle génératrice  $\Gamma[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]$  à basse énergie. La théorie effective procède donc en construisant un lagrangien effectif  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  dépendant des sept sources  $L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0$ , ainsi que des degrés de liberté à basse énergie: les GBs, rassemblés dans la matrice  $\Sigma$  (2.41). On veut donc déterminer les règles de construction de  $\mathcal{L}_{\text{eff}}[\Sigma, L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]$  telle que

$$e^{i\Gamma[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]} = \int d[\Sigma] e^{i\int dx \mathcal{L}_{\text{eff}}[\Sigma, L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]}, \quad (2.55)$$

où l'on utilise la mesure d'intégration  $d[\Sigma]$  invariante sous les transformations (2.38).

Nous avons vu à la section 2.2.1 que la fonctionnelle génératrice était invariante sous les transformations locales (2.49-2.51). On requiert donc la même chose de sa représentation à basse énergie (2.55). La règle de construction du lagrangien effectif est alors la suivante: le lagrangien effectif  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  qui apparaît dans cette représentation à basse énergie doit lui-même être invariant sous les transformations  $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R \times \text{U}(1)_V$  locales des champs et des sources, que nous reproduisons ici

$$\Sigma(x) \mapsto {}^t\Sigma(x) = L(x) \Sigma(x) R(x)^\dagger, \quad (2.56)$$

$$L_\mu(x) \mapsto {}^tL_\mu(x) = L(x) L_\mu(x) L(x)^\dagger + i L(x) \partial_\mu L(x)^\dagger, \quad (2.57)$$

$$R_\mu(x) \mapsto {}^tR_\mu(x) = R(x) R_\mu(x) R(x)^\dagger + i R(x) \partial_\mu R(x)^\dagger, \quad (2.58)$$

$$B_\mu^0(x) \mapsto {}^tB_\mu^0(x) = B_\mu^0(x) - \partial_\mu \alpha^0(x). \quad (2.59)$$

Pour ce qui est du lagrangien effectif, nous considérerons par la suite toujours des transformations locales, et nous omettons donc la dépendance explicite en  $x$  dès maintenant. De même, les champs et les sources dépendent toujours de  $x$ . On peut vérifier directement qu'un lagrangien effectif invariant sous les transformations (2.56-2.59) produira bien une fonctionnelle génératrice invariante sous (2.57-2.59), comme désiré. La démonstration procède comme suit [Kne96]

$$\begin{aligned} e^{i\Gamma[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]} &= \int d[\Sigma] e^{i\int dx \mathcal{L}_{\text{eff}}[\Sigma, {}^tL_\mu^a, {}^tR_\mu^a, {}^tB_\mu^0]} \\ &= \int d[{}^t\Sigma] e^{i\int dx \mathcal{L}_{\text{eff}}[{}^t\Sigma, {}^tL_\mu^a, {}^tR_\mu^a, {}^tB_\mu^0]} \\ &= \int d[{}^t\Sigma] e^{i\int dx \mathcal{L}_{\text{eff}}[\Sigma, L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]} \\ &= \int d[\Sigma] e^{i\int dx \mathcal{L}_{\text{eff}}[\Sigma, L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]} \\ &= e^{i\Gamma[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

ce qui est le résultat désiré. Nous avons utilisé successivement: un changement de nom de la variable d'intégration, l'invariance du lagrangien effectif, puis l'invariance de la mesure d'intégration sous la transformation (2.38) et donc sous sa version locale (2.56). Nous ne présentons pas ici la démonstration de la réciproque: le fait que l'invariance locale de  $\Gamma[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]$  implique effectivement celle de  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ , car cette démonstration nécessite une étude détaillée [Leu94], par récurrence ordre par ordre dans le développement en puissance des impulsions que nous n'avons pas encore introduit.

En conclusion, pour que la représentation à basse énergie de la fonctionnelle génératrice (2.55) reproduise les identités de Ward de la symétrie chirale, le lagrangien effectif  $\mathcal{L}_{\text{eff}}[\Sigma, L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]$  doit être invariant sous les transformations locales (2.56-2.59) de  $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R \times \text{U}(1)_V$ . A ce stade, on a exploité toutes les contraintes dues à la symétrie chirale: la présence de modes de Goldstone, ainsi que leurs propriétés de transformations, et les identités de Ward. On ne sait finalement rien de plus sur le lagrangien effectif: celui-ci doit donc inclure tous les termes permis par les symétries, quelle que soit leur dimension physique. Il existe une infinité de tels termes. Il est donc nécessaire d'avoir une règle pour ordonner les différents termes, ainsi que les diagrammes de Feynman, en fonction de leur importance. Nous exposons maintenant ce point.

## 2.3 Théorie de perturbation chirale

Dans le cadre des théories renormalisables, on construit un développement basé sur les puissances de constantes de couplage avec un nombre fini d'opérateurs de dimension inférieure ou égale à quatre. Ici, la situation est différente: on a une infinité d'opérateurs, et donc une infinité de constantes apparaissant en facteur. En revanche, puisque le domaine d'application de la théorie effective est restreint aux faibles énergies (voir la discussion de la section 2.1.2), on peut considérer les impulsions des pattes externes, ou des sources, comme paramètre de développement. La LEET essaie d'utiliser au maximum les informations connues à basse énergie, sans se préoccuper du comportement à haute énergie: la première conséquence est que le comptage à appliquer aux opérateurs est différent du comptage basé sur les dimensions physiques utilisé pour les théories renormalisables. En particulier, nous avons déjà vu en (2.25-2.26) que la dynamique de la QCD perturbative produisait une constante dimensionnée  $f_0$ , rendant inadaptées le comptage des dimensions physiques.

### 2.3.1 Comptage de puissance et développement en boucles

En pratique, l'application de cette idée nécessite deux étapes: on doit tout d'abord ordonner les opérateurs dans le lagrangien en fonction du nombre de dérivées, puis étudier le comportement des diagrammes de Feynman.

#### 2.3.1.1 Lagrangien effectif

Pour construire les opérateurs invariants sous la symétrie chirale locale, on utilise des briques de construction élémentaires qui se transforment de façon covariante. Il s'agit de

$$D_\mu \Sigma = \partial_\mu \Sigma - i L_\mu \Sigma + i \Sigma R_\mu \mapsto L (D_\mu \Sigma) R^\dagger, \quad (2.61)$$

$$L_{\mu\nu} = \partial_\mu L_\nu - \partial_\nu L_\mu - i [L_\mu, L_\nu] \mapsto L L_{\mu\nu} L^\dagger, \quad (2.62)$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu R_\nu - \partial_\nu R_\mu - i [R_\mu, R_\nu] \mapsto R R_{\mu\nu} R^\dagger, \quad (2.63)$$

$$B_{\mu\nu}^0 = \partial_\mu B_\nu^0 - \partial_\nu B_\mu^0 \mapsto B_{\mu\nu}^0. \quad (2.64)$$

Notons que la définition de la dérivée covariante nous fournit immédiatement la règle de comptage à appliquer aux sources si l'on désire respecter l'invariance locale à chaque ordre du développement en puissance des impulsions. On dénotera comme suit le fait qu'une quantité  $X$  doit être comptabilisée comme une dérivée à la puissance  $n$

$$X = \mathcal{O}(p^n). \quad (2.65)$$

Le point de départ est

$$\partial_\mu = \mathcal{O}(p^1). \quad (2.66)$$

On doit imposer le comptage chirale <sup>2</sup> suivant

$$D_\mu = \mathcal{O}(p^1), \quad (2.67)$$

ce qui implique

$$L_\mu, R_\mu = \mathcal{O}(p^1). \quad (2.68)$$

Remarquons que l'on aboutirait à la même conclusion en étudiant (2.57-2.58), puisque les transformations  $L, R$  sont unitaires ( $L^\dagger L = \mathbb{1}_{2 \times 2}$ ) et ne peuvent donc pas porter de comptage de puissance. Par extension, on imposera

$$B_\mu^0 = \mathcal{O}(p^1), \quad (2.69)$$

bien que, dans ce cas limité n'incluant que des GBs, ceci ne découle pas automatiquement du raisonnement ci-dessus <sup>3</sup>. Il n'y a pas de sens profond associé à ce comptage pour les sources: ces objets eux-mêmes ne sont pas physiques, mais servent uniquement à extraire de façon commode les fonctions de Green des courants. Le sens physique de ce comptage réapparaîtra lorsque l'on considérera ces connexions comme des champs de jauge dynamiques (section 2.4.2.1).

2. On utilisera indifféremment les expressions: « comptage chirale » et « dimension infrarouge ».

3. Nous verrons plus tard que, si l'on introduit des champs se transformant sous cette symétrie  $U(1)_V$ , alors le comptage (2.69) sera nécessaire.

Comme la matrice  $\Sigma$  qui décrit les champs de Goldstone est unitaire

$$\Sigma^\dagger \Sigma = \mathbb{1}_{2 \times 2}, \quad (2.70)$$

on doit imposer

$$\Sigma = \mathcal{O}(p^0). \quad (2.71)$$

Le seul terme invariant que l'on puisse construire à l'ordre  $\mathcal{O}(p^0)$  est une constante

$$\langle \Sigma^\dagger \Sigma \rangle = 2. \quad (2.72)$$

Le seul terme invariant à deux dérivées que l'on puisse construire est  $\langle D_\mu \Sigma^\dagger D^\mu \Sigma \rangle$ , où  $\langle X \rangle$  représente la trace de la matrice  $X$ . On en déduit l'expression du lagrangien  $\mathcal{O}(p^2)$ , où l'on a normalisé le terme cinétique des champs  $\pi^a$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{f_0^2}{4} \langle D_\mu \Sigma^\dagger D^\mu \Sigma \rangle. \quad (2.73)$$

La constante  $f_0$  ne porte pas de comptage chirale: elle est fixée par la dynamique non perturbative de la QCD. De plus, nous verrons que le rapport entre  $f_0$  et l'échelle  $\Lambda$  (au-delà de laquelle la théorie effective ne s'applique plus) est fixe: on aura  $\Lambda/f_0 \sim 4\pi$ . A la différence des théories renormalisables, le lagrangien (2.73) implique nécessairement des interactions entre particules en nombre arbitraire, du fait de la réalisation non-linéaire de la symétrie. On peut également remarquer que la constante  $f_0$  brise l'invariance d'échelle de ce lagrangien pour des champs sans masses. C'est précisément la présence de cette constante de désintégration  $f_0$ , directement liée à la brisure spontanée (voir (2.25)), qui rend inapproprié le classement des opérateurs en fonction de leur dimension physique.

De façon générale, les constantes multiplicatives apparaissant en facteur d'un opérateur seront comptabilisées comme d'ordre un <sup>4</sup>. Ceci justifie donc le comptage chirale utilisé

$$f_0 = \mathcal{O}(p^0), \quad (2.74)$$

qui entraîne à son tour

$$\pi^a = \mathcal{O}(p^0). \quad (2.75)$$

La justification ultime de ces règles de comptage réside dans la formule de comptage de Weinberg (voir 2.3.1.2), qui montre que l'on peut donner un sens au développement avec ces dimensions infrarouges. Prenant la dérivée fonctionnelle de  $\mathcal{L}_2$  par rapport aux sources, on obtient l'expression des courants de Noether

$$\begin{aligned} J_{A\mu}^a &= -i \frac{f_0^2}{4} \langle \tau^a \{ \Sigma^\dagger, \partial_\mu \Sigma \} \rangle \\ &= -f_0 \partial_\mu \pi^a + \mathcal{O}(\pi^2), \end{aligned} \quad (2.76)$$

et on reconnaît le fait que  $f_0$  est la constante de désintégration des GBs.

Le lagrangien  $\mathcal{O}(p^4)$  contient tous les opérateurs d'ordre  $\mathcal{O}(p^4)$  invariants sous  $C$ ,  $P$  et la symétrie chirale. Il se met sous la forme [GL85] <sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= \left( L_1 + \frac{L_3}{2} \right) \langle D_\mu \Sigma^\dagger D^\mu \Sigma \rangle^2 + L_2 \langle D_\mu \Sigma^\dagger D_\nu \Sigma \rangle \langle D^\mu \Sigma^\dagger D^\nu \Sigma \rangle \\ &\quad - i L_9 \langle L^{\mu\nu} D_\mu \Sigma D_\nu \Sigma^\dagger + R^{\mu\nu} D_\mu \Sigma^\dagger D_\nu \Sigma \rangle \\ &\quad + L_{10} \langle L_{\mu\nu} \Sigma R^{\mu\nu} \Sigma^\dagger \rangle + H_1 \langle L_{\mu\nu} L^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \rangle, \end{aligned} \quad (2.77)$$

4. En principe, on peut imaginer des exceptions dans le cas où la symétrie est accrue lorsque la constante est posée égale à zéro: on peut alors considérer la constante comme un petit paramètre (en relation avec l'idée de naturalité de 't Hooft [tH79a]) et lui associer un comptage de puissance. En pratique, ceci sera formulé en termes de spurions aux chapitres 4 et 5.

5. Nous utilisons les notations du cas de trois saveurs nulles, utilisant cependant l'identité  $\langle D_\mu \Sigma^\dagger D^\mu \Sigma D_\nu \Sigma^\dagger D^\nu \Sigma \rangle = 1/2 \langle D_\mu \Sigma^\dagger D^\mu \Sigma \rangle^2$  valable dans ce cas. Les autres opérateurs présents dans [GL85] sont absents dans la limite chirale.

où les  $L_i$  sont les constantes de basse énergie. Pour arriver à ce résultat, on utilise, en plus des identités sur les traces et les déterminants des matrices [GL85, FS96], le fait que l'on peut effectuer des redéfinitions des champs de Goldstone sans affecter les prédictions physiques: la procédure est communément appelé « utiliser les équations de mouvement de  $\mathcal{L}_2$  pour éliminer les termes redondants de  $\mathcal{L}_4$  » [GL84, Geo91, SF95].

Un résultat crucial de cette section est que le lagrangien effectif ne commence qu'à l'ordre  $\mathcal{O}(p^2)$ . Ceci est la traduction dans le langage des théories effectives du fait suivant, que nous avons déjà énoncé: les GBs n'interagissent plus lorsque leur impulsion tend vers zéro. Plus généralement, on voit que le lagrangien effectif se décompose selon une série de termes d'ordre de plus en plus élevé

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 + \dots \quad (2.78)$$

### 2.3.1.2 Formule de comptage de Weinberg

Nous avons ordonné les termes du lagrangien suivant une règle bien définie, liée au nombre de dérivées qu'ils contiennent. Il nous faut maintenant comparer l'importance des différents diagrammes de Feynman. Pour cela, nous examinons le degré d'homogénéité d'un diagramme donné sous un changement d'échelle (*rescaling*) des impulsions externes  $p_i \mapsto t p_i$  [Wei79c, Sch02], la limite d'intérêt correspondant à  $t \rightarrow 0$ . On voit alors que la conservation de l'impulsion, via les fonctions de Dirac à chaque vertex, impose le même changement d'échelle pour les impulsions internes. On trouve ainsi que le diagramme est multiplié par  $t^D$  où le degré d'homogénéité  $D$  est donné par

$$D = 2I - 4V + \sum_{v=1}^V d_v, \quad (2.79)$$

où  $I$  est le nombre de lignes internes,  $V$  le nombre de vertex, et  $d_v$  la dimension chirale du vertex  $v$ . En utilisant la relation entre le nombre de boucles  $L$  et le nombre de vertex  $V$  d'un graphe connexe:  $L = I - V + 1$ , on obtient [Wei79c]

$$D = 2 + 2L + \sum_{v=1}^V (d_v - 2). \quad (2.80)$$

Cette formule suppose l'utilisation de la régularisation dimensionnelle, qui ne fait pas apparaître de puissance d'une échelle autre que les impulsions externes après intégration, mais uniquement des logarithmes (si l'on a des particules massives, ce que nous considérerons plus tard). Notons que l'on se doit de toutes façon d'utiliser un régulateur qui préserve la symétrie sur laquelle est basée la construction. En pratique, ceci implique justement l'utilisation de la régularisation dimensionnelle <sup>6</sup>.

La formule de comptage de Weinberg (2.80) nous apprend deux choses. Premièrement, l'ordre chirale  $D$  auquel un diagramme contribue dans le développement est une fonction strictement croissante du nombre de boucles, indépendamment du nombre de lignes internes. Deuxièmement,  $D$  est également une fonction croissante du nombre de vertex qui composent le diagramme, puisque le lagrangien effectif commence avec l'ordre  $\mathcal{O}(p^2)$ , et que tous les vertex ont donc une dimension supérieure à deux

$$d_v \geq 2. \quad (2.81)$$

On vérifie ainsi que le comptage de puissances introduit à la section 2.3.1.1 permet de formuler un développement en puissances des impulsions, dont la précision peut être systématiquement améliorée en travaillant à l'ordre supérieur.

En particulier, si l'on veut donner des résultats à la précision  $\mathcal{O}(p^D)$ , on doit connaître les termes de  $\mathcal{L}_D$  dans le lagrangien effectif, puisque les diagrammes en arbres avec un vertex de dimension  $d_v = D$  vont contribuer à cet ordre. D'autre part, on devra en général effectuer des calculs jusqu'à un nombre de boucles égal à  $D/2 - 1$ : le lagrangien  $\mathcal{L}_2$  donnera en effet à ce nombre de boucles des contributions à l'ordre  $\mathcal{O}(p^D)$ . De façon plus pratique, considérons la précision la plus basse:  $\mathcal{O}(p^2)$ . Seuls les diagrammes en arbres avec des vertex de  $\mathcal{L}_2$  contribueront. A l'ordre de précision suivant ( $\mathcal{O}(p^4)$ ), on aura d'une part des contributions à une boucle avec des vertex de  $\mathcal{L}_2$ , et des contributions en arbres avec un vertex de  $\mathcal{L}_4$ . Ceci permettra justement d'absorber les divergences des boucles, comme nous allons maintenant le voir.

6. Pour une discussion approfondie, voir [EM94].

### 2.3.2 Renormalisation ordre par ordre

Les contributions d'ordre  $\mathcal{O}(p^2)$  à la fonctionnelle génératrice sont données par le lagrangien  $\mathcal{L}_2$  en arbres, c'est-à-dire

$$\Gamma_2[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0] = \int dx \mathcal{L}_2[\Sigma_{\text{cl}}, L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0], \quad (2.82)$$

où  $\Sigma_{\text{cl}}$  est la solution des équations classiques du mouvement

$$(D_\mu D^\mu \Sigma) \Sigma^\dagger - \Sigma (D_\mu D^\mu \Sigma)^\dagger = 0, \quad (2.83)$$

dérivées du lagrangien  $\mathcal{L}_2$ .

Nous décrivons ensuite la procédure à l'ordre  $\mathcal{O}(p^4)$ . Les contributions à une boucle dues à  $\mathcal{L}_2$  sont d'ordre  $\mathcal{O}(p^4)$  et s'écrivent

$$\Gamma_4^{L=1}[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0] = \frac{i}{2} \ln \text{Det } D_2, \quad (2.84)$$

où  $D_2$  est l'opérateur décrivant les fluctuations quadratiques autour de la solution des équations de mouvement (2.83). Les divergences contenues dans ces boucles (2.84) peuvent être absorbées dans les contributions en arbres de  $\mathcal{L}_4$

$$\Gamma_4^{L=0}[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0] = \int dx \mathcal{L}_4[\Sigma_{\text{cl}}, L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0], \quad (2.85)$$

puisque ce lagrangien rassemble tous les opérateurs de dimension chirale  $\mathcal{O}(p^4)$  invariants sous la symétrie du problème, et que l'on utilise la régularisation dimensionnelle qui préserve ces symétries. Alors, on peut obtenir des résultats finis et indépendants d'échelle à l'ordre de précision  $\mathcal{O}(p^4)$ , en écrivant (on omet la dépendance en les sources par souci de clarté)

$$\begin{aligned} \Gamma_4 &= \Gamma_4^{L=1} + \int dx \mathcal{L}_4(L_i) \\ &= \Gamma_4^{L=1}|_{\text{partie finie}}(\mu) + \int dx \mathcal{L}_4(L_i^r(\mu)). \end{aligned} \quad (2.86)$$

A cette fin, on doit définir les constantes de couplages  $\mathcal{O}(p^4)$  nues divergentes et indépendantes d'échelle  $L_i$  en fonction des constantes renormalisées finies mais dépendantes d'échelles  $L_i^r$  comme suit [GL85]

$$L_i = L_i^r(\mu) + \Gamma_i \lambda, \quad (2.87)$$

avec

$$\lambda = \frac{\mu^{d-4}}{16\pi^2} \left( \frac{1}{d-4} - \frac{1}{2} (\ln 4\pi - \gamma + 1) \right), \quad (2.88)$$

et

$$\Gamma_1 = \frac{1}{12}, \quad (2.89)$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{6}, \quad (2.90)$$

$$\Gamma_3 = 0, \quad (2.91)$$

$$\Gamma_9 = \frac{1}{6}, \quad (2.92)$$

$$\Gamma_{10} = -\frac{1}{6}, \quad (2.93)$$

et

$$H_1 = H_1^r(\mu) + \frac{1}{12} \lambda. \quad (2.94)$$



L'écriture (2.86) met en évidence le fait que le résultat est fini. L'indépendance vis-à-vis de l'échelle de renormalisation  $\mu$  sera automatiquement vérifiée grâce aux définitions (2.87-2.94). De cette façon, on obtient une série qui approxime la fonctionnelle génératrice exacte  $\Gamma[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0]$ , sous la forme

$$\Gamma[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0] = \Gamma_2[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0] + \Gamma_4[L_\mu^a, R_\mu^a, B_\mu^0] + \dots \quad (2.95)$$

A ce stade, on peut se poser la question suivante: jusqu'à quelle échelle ce développement est-il utile? Il existe deux façons de répondre à cette question. La première est de remarquer qu'en physique hadronique, la première résonance vectorielle est le  $\rho_0(770)$  que nous n'avons pas incluse dans notre théorie effective. Ceci donne une idée de l'échelle à laquelle la théorie effective sera forcément incapable de reproduire les résultats phénoménologiques. Un deuxième point de vue est de considérer les renormalisations des constantes  $L_i$  [MG84, Geo84]: lorsque l'on effectue le développement en puissances d'impulsions, on sous-entend en réalité en puissances de  $p/\Lambda$ , où l'échelle  $\Lambda$  est celle qui nous intéresse ici. Les objets dimensionnés de l'unique terme de  $\mathcal{L}_2$  peuvent schématiquement s'écrire  $f_0^2 p^2$ . On doit s'attendre à ce que les termes de  $\mathcal{L}_4$  donnent des contributions d'ordre  $f_0^2 p^2 (p^2/\Lambda^2)$ . Ceci implique que les constantes  $L_i$  sont d'ordre  $f_0^2/\Lambda^2$ . Si l'on change maintenant l'échelle de renormalisation  $\mu$  par un facteur d'ordre l'unité, la variation de la partie finie est d'ordre  $1/(4\pi)^2$  puisque l'on a

$$L_i^r(\mu') = L_i^r(\mu) + \frac{\Gamma_i}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\mu}{\mu'}\right). \quad (2.96)$$

Si notre compréhension est juste, cette variation ne peut pas raisonnablement être plus grande que l'estimation initiale, et donc on ne peut pas avoir  $1/(4\pi)^2 \gg f_0^2/\Lambda^2$ . La conclusion est donc que

$$\Lambda \lesssim 4\pi f_0. \quad (2.97)$$

Ceci signifie que la constante de désintégration des GBs ne peut pas être prise arbitrairement petite devant  $\Lambda$ : ceci est cohérent avec son comptage chirale introduit en (2.74). Notons que (2.97) fournit l'estimation

$$\Lambda \lesssim 1.1 \text{ GeV}. \quad (2.98)$$

### 2.3.3 Traitement des masses des pions

On peut incorporer les masses des pions dans le formalisme précédent, auquel cas les GBs deviennent des PGBs: le point important est que, si l'on introduit des masses pour les scalaires, on brise explicitement la symétrie chirale. En l'absence de tels termes, les GBs sont protégés par la symétrie chirale et n'acquièrent pas de masses *via* les corrections radiatives. Ceci implique précisément que, si l'on introduit les paramètres de brisure explicite rendant compte de ces masses (qui en QCD sont dues aux masses de quarks non-nulles), les corrections radiatives aux masses seront elles-mêmes en puissance de ces paramètres: les « petites » masses sont donc naturelles pour les PGBs, au sens de 't Hooft [tH79a]. Ici, le terme « petit » s'entend *a priori* « petit devant l'échelle  $\Lambda$  ». Physiquement, ceci est raisonnable pour les applications aux pions, puisque l'on a expérimentalement

$$m_{\pi^0} \simeq 135 \text{ MeV}. \quad (2.99)$$

En relation avec l'idée de naturalité, on cherche à expliciter la manière dont les nouveaux termes vont briser la symétrie: la façon de procéder est de maintenir formellement l'invariance originale. On remarque que le terme de masse pour les quarks que l'on doit maintenant ajouter au lagrangien de la QCD

$$- \bar{\Psi}_R M \Psi_L - \bar{\Psi}_L M^\dagger \Psi_R, \quad (2.100)$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}, \quad (2.101)$$

serait invariant si l'on remplaçait la matrice  $M$  par un champ  $\chi$  ne propageant pas (un spurion) [GL84, GL85] avec les propriétés de transformations suivantes sous la symétrie chirale [Geo84]

$$\chi \mapsto R\chi L^\dagger, \quad (2.102)$$

où  $\chi$  est une matrice  $2 \times 2$ . La brisure explicite de symétrie est alors introduite comme suit: on écrit le lagrangien effectif le plus général, comme auparavant, mais avec le spurion  $\chi$  comme objet supplémentaire possible <sup>7</sup>. Après avoir écrit le lagrangien, on utilise la valeur physique

$$\chi|_{\text{physique}} = M. \quad (2.103)$$

Le seul terme invariant et sans dérivées qui contienne une puissances de  $\chi$  est

$$\frac{f_0^2 B_0}{2} \langle \chi \Sigma + \Sigma^\dagger \chi^\dagger \rangle, \quad (2.104)$$

où nous avons introduit une constante  $B_0$  de dimension physique égale à un

$$[B_0] = +1, \quad (2.105)$$

avec, de façon similaire à  $f_0$ , le comptage chirale suivant

$$B_0 = \mathcal{O}(p^0). \quad (2.106)$$

On peut vérifier que le terme (2.104) donne bien une masse aux pions

$$m_\pi^2 = B_0(m_u + m_d). \quad (2.107)$$

Ceci va nous permettre de déterminer le comptage de puissances à appliquer au spurion: si l'on veut que la théorie effective décrive les pôles dus aux PGBs sans resommation des propagateurs, on devra compter [Wei79c]

$$m_\pi^2 = \mathcal{O}(p^2), \quad (2.108)$$

soit

$$B_0 \chi = \mathcal{O}(p^2). \quad (2.109)$$

Pour l'application à la QCD, la relation (2.108) paraît physiquement raisonnable. La théorie effective devrait en effet permettre d'étudier des processus mettant en jeu des énergies atteignant la valeur donnée en (2.99), qui reste petite devant  $\Lambda$  donnée en (2.97).

Pour déterminer si les dimensions chirale attribuées aux différents objets sont cohérentes, on vérifie que l'on reproduit la formule de comptage de Weinberg (2.80). On peut vérifier que ceci est le cas avec le comptage (2.109), entraînant (2.108): les lignes internes des diagrammes sont modifiées selon

$$\int dk \frac{i}{k^2 + i\epsilon} \longrightarrow \int dk \frac{i}{k^2 - m_\pi^2 + i\epsilon}, \quad (2.110)$$

et le comptage est donc le même. Le terme (2.104) introduit également des interactions nouvelles, qui vérifieront également la condition (2.81). On obtient donc la même formule de comptage (2.80), ce qui nous permet de dire que l'organisation du développement est bien définie, et correspond à un développement en boucles. En revanche, le lien avec le développement en puissance des impulsions n'est plus aussi direct, puisqu'on considère d'autres paramètres de développement <sup>8</sup>.

7. En réalité, la logique serait plus précisément décrite ainsi: en présence de masse de quarks, les courants (2.5-2.7) ne sont plus exactement conservés. Leurs identités de Ward font intervenir les densités scalaires et pseudo-scalaires. La matrice  $\chi$  est introduite en tant que source de ces opérateurs. Le fait de reproduire les identités Ward demande que le lagrangien effectif inclut les invariants construits avec  $\chi$ , avec la loi de transformation (2.102). A la différence des sources vectorielles, les dérivées fonctionnelles seront prises non pas en  $\chi=0$ , mais en  $\chi=M$ .

8. Nous appellerons le développement correspondant « développement chirale » ou « développement à basse énergie ». Ceci est ainsi une généralisation du « développement en puissances des impulsions ».

Pour clore cette discussion, rappelons que la limite  $p \rightarrow 0$  a un sens physique: on peut toujours étudier des processus à des énergies faibles. En revanche, la limite  $m_\pi \rightarrow 0$  est un outil technique qui traduit mathématiquement l'idée que  $m_\pi^2 \ll \Lambda^2$ . La relation (2.108) est obtenue lorsque l'on exige un lien entre les deux développements.

## 2.4 Théories effectives non-découplantes: au-delà de la $\chi$ PT

Nous avons décrit le traitement des GBs et des PGBs dans le cadre d'une théorie effective à basse énergie. Dans ce cas, le classement des opérateurs selon leur dimension physique n'est plus approprié, et l'on doit recourir à un autre classement systématique. On peut certes donner un sens physique aux dimensions chirales associées aux différents objets, mais la formule centrale est (2.80), qui permet de garantir la cohérence du développement.

En vue d'appliquer le formalisme au secteur électrofaible, nous introduisons en plus des GBs paramétrés par la matrice  $\Sigma$ , des champs de spin 1 ainsi que de spin 1/2 dans la théorie effective à basse énergie, précisant les conditions à vérifier.

### 2.4.1 Particules protégées: champs de spin 1 et 1/2

L'introduction d'autres champs dans la théorie effective nécessite que leurs masses soient protégées par une symétrie, comme c'était le cas pour les PGBs. Si ce n'est pas le cas, on retrouve la difficulté de naturalité décrite à la section 1.6.3: les champs en questions n'appartiennent en fait pas au secteur de basse énergie, leurs masses tendant naturellement à être de l'ordre de l'échelle  $\Lambda$ . Pour les scalaires, nous avons déjà mentionné (section 1.6.3.2) la possibilité d'utiliser la supersymétrie. Une des conséquences principales dans ce cas est que le domaine d'application de la théorie perturbative peut être arbitrairement étendu, puisque l'on préserve la propriété de renormalisabilité. Nous n'étudierons donc pas cette possibilité dans le cadre des théories non-découplantes puisqu'elle correspond plutôt à suivre la ligne des théories renormalisables. Une autre possibilité pour protéger la masse du boson de Higgs est de supposer qu'il est lui-même un PGB. Cette approche a récemment trouvé une voie possible, sous la forme des modèles de *little Higgs*. Nous ne considérerons pas ces modèles, bien que nous serons amenés à discuter certaines connexions aux chapitres 4 et 5.

Nous nous intéressons en revanche aux cas suivants: tout d'abord l'introduction de champs vectoriels. Dans ce cas, on doit en fait supposer que ces champs sont sujets à une symétrie interdisant un terme de masse: des champs de Yang-Mills, respectant l'invariance sous la symétrie de jauge associée. Nous avons déjà vu que des champs de jauge couplés à des GBs vont acquérir une masse (sections 1.3.1 et 1.7.3). Nous verrons en revanche que la masse obtenue *via* le mécanisme de Higgs (dynamique) satisfait automatiquement un critère de comptage de puissances approprié, c'est-à-dire permettant un développement cohérent dans le cadre de la théorie effective. Ceci est directement lié au fait que la constante de couplage de jauge est utilisée comme paramètre de développement (comme c'est le cas dans les théories renormalisables). La deuxième possibilité concerne les champs fermioniques: la symétrie chirale permet d'effectuer un développement autour de la limite de masse nulle.

### 2.4.2 Généralisation du comptage de puissances

#### 2.4.2.1 Champs de jauge

On considère le cas où les connexions dans la dérivée covariante (2.61) deviennent des champs dynamiques (variables d'intégration). On écrira ainsi

$$R_\mu = g G_\mu, \quad (2.111)$$

où  $G_\mu$  est le champ dynamique. La propriété de transformation que ce champ doit vérifier est obtenue directement à partir de cette identification

$$G_\mu \mapsto R G_\mu R^\dagger + \frac{i}{g} R \partial_\mu R^\dagger. \quad (2.112)$$

Le comptage de puissances pour la connexion est maintenu (comparer avec (2.68) et (2.63))

$$g G_\mu = \mathcal{O}(p^1), \quad (2.113)$$

$$g G_{\mu\nu} = g (\partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu - i g [G_\mu, G_\nu]) = \mathcal{O}(p^2). \quad (2.114)$$

Si les champs de jauge sont des variables dynamiques au même titre que les GBs, on s'attend également à ce que le terme cinétique correspondant intervienne au niveau de  $\mathcal{L}_2$ , soit

$$-\frac{1}{2} \langle G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \rangle = \mathcal{O}(p^2). \quad (2.115)$$

Ceci donne immédiatement, par comparaison avec (2.113-2.114)

$$\begin{aligned} G_\mu &= \mathcal{O}(p^0), \\ g &= \mathcal{O}(p^1). \end{aligned} \quad (2.116)$$

Remarquons que la limite de constante de couplage nulle  $g \rightarrow 0$  correspond à l'annulation de certaines interactions et à des lois de conservations (nombre de particules vectorielles [tH79a]). Ceci explique le fait que cette constante de couplage porte une dimension chirale, en liaison avec l'idée de naturalité.

L'introduction de champs de jauge a été considérée dans le cas des applications au secteur électrofaible [Wud94, NS96, NS00], mais également pour le cas de la QCD, en liaison avec le couplage des pions au photon [Ure95, KU98]<sup>9</sup>. Dans ce cas, le développement a été mené explicitement à une boucle, de même que pour la partie bosonique du secteur électrofaible [NS00]. Le comptage utilisé est le même que celui que nous venons d'introduire. Nous discutons ici la cohérence de ce comptage et précisons le rôle de la formule de comptage de Weinberg. Les calculs à une boucle seront considérés au chapitre 3.

La question est à présent de savoir si on obtient bien la formule de comptage (2.80), généralisée pour inclure le cas des champs vectoriels. En principe, cette question est délicate pour le cas des champs de jauge non-abéliens, puisque l'on devrait introduire un terme de fixation de jauge et considérer la propagation de champs fantômes. Cependant, dans les cas qui nous intéressent, les bosons vecteurs vont acquérir une masse par le mécanisme de Higgs, excepté pour un sous-groupe  $U(1)_Q$  que l'on sait traiter sans recourir à des fantômes. Ce phénomène de Higgs sera étudié plus en détail au chapitre 3. Le point important pour cette section est que la masse des champs vectoriels pour ce cas d'une théorie de Yang-Mills  $SU(2)$  couplée aux GBs est donnée par l'expression en arbres (1.151)<sup>10</sup>

$$M_W^2 = \frac{g^2 f^2}{4} = \mathcal{O}(p^2). \quad (2.117)$$

Le comptage chirale de la masse est donc automatiquement  $\mathcal{O}(p^2)$ : c'est l'expression dans le langage des théories effectives du fait que cette masse est protégée. Ceci signifie que le propagateur de ces champs vectoriels massifs en jauge unitaire porte le même comptage que celui des GBs

$$-i \int dk \frac{\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2}}{k^2 - M_W^2 + i\epsilon} = \mathcal{O}(p^2). \quad (2.118)$$

Pour un champ de jauge abélien non brisé, on obtiendra le même comptage.

On voit donc que la formule de comptage de Weinberg (2.80) s'applique: le comptage de puissances proposé ci-dessus va donc permettre un développement en boucles à basse énergie, comme extension du développement en puissance des impulsions. A nouveau, nous remarquons qu'il est crucial que les masses des particules présentes dans la théories effectives soient petites, et concrètement comptabilisées comme  $\mathcal{O}(p^1)$  pour la cohérence du développement. A son tour, ce comptage est possible en vertu de la naturalité, puisque l'on a uniquement inclus des particules protégées par des symétries.

9. Dans ce dernier cas, on introduit les couplages électriques des quarks sous formes de spurions brisant explicitement la symétrie [EGPdR89, Mou97]. En tout état de cause, ces spurions étant comptabilisés comme  $\mathcal{O}(p^1)$ , on obtient le même résultat.

10. Nous précisons à la section 3.2.1 la différence entre ce cas et le cas du champ vectoriel massif du point de vue du comptage de puissance. Voir également à ce sujet la section D.3.

### 2.4.2.2 Fermions chiraux

Les derniers champs dynamiques que nous souhaitons introduire dans la théorie effective sont des fermions. Leurs masses sont protégées par la symétrie chirale: les propriétés de transformation des chiralités gauches et droites étant différentes, on ne peut pas écrire directement un terme de masse invariant. Pour chaque chiralité, introduisons un doublet de spineurs de Dirac, soit  $\chi_L$  et  $\chi_R$ . De nouveau, si l'on souhaite que les termes cinétiques pour ces fermions chiraux interviennent au même ordre que pour les GBs (c'est-à-dire dans  $\mathcal{L}_2$ ), on va fixer

$$i \overline{\chi_L} \gamma^\mu \partial_\mu \chi_L = \mathcal{O}(p^2), \quad (2.119)$$

$$i \overline{\chi_R} \gamma^\mu \partial_\mu \chi_R = \mathcal{O}(p^2), \quad (2.120)$$

ce qui implique le comptage suivant, déjà utilisé par d'autres auteurs [Wud94, NS96, Nyf99]

$$\chi_L, \chi_R = \mathcal{O}(p^{1/2}). \quad (2.121)$$

Les lignes internes fermioniques donneront le propagateur suivant

$$-i \int dk \frac{\gamma^\mu k_\mu}{k^2 + i\epsilon} = \mathcal{O}(p^3). \quad (2.122)$$

Dans ce cas, il faut noter que les vertex joints par ce propagateur contenaient deux spineurs comptabilisés chacun comme  $\mathcal{O}(p^{1/2})$ . Ceci est responsable du terme de polarisation  $\sum u(k) \overline{u}(k) = \gamma^\mu k_\mu$  qui compte pour  $\mathcal{O}(p^1)$ : le comptage pour les lignes internes est donc strictement identique au cas bosonique. Pour un diagramme sans pattes externes, que l'on peut directement comparer à un opérateur du lagrangien effectif, on aura donc de nouveau la même formule de comptage de Weinberg (2.80), à la condition que l'on définisse la dimension chirale d'un opérateur comme <sup>11</sup>

$$d_v = n_\partial + n_g + \frac{1}{2} n_\chi, \quad (2.123)$$

où  $n_\partial$  est le nombre de puissance de dérivées (covariantes) dans l'opérateur,  $n_g$  le nombre de constantes de couplages et  $n_\chi$  le nombre de champs fermioniques chiraux. Les poids respectifs dans (2.123) reflètent le comptage de puissances introduit dans ce chapitre. La formule (2.80) donne alors le degré d'homogénéité  $D$  d'un graphe lorsque l'on effectue le changement d'échelle des impulsions externes, constantes de couplage, et spineurs selon

$$p_i \mapsto t p_i, \quad (2.124)$$

$$g \mapsto t g, \quad (2.125)$$

$$\chi \mapsto t^{1/2} \chi. \quad (2.126)$$

Le graphe est alors multiplié par  $t^D$ , et contribuera donc à l'ordre  $\mathcal{O}(p^D)$ .

On ordonne donc les opérateurs dans le lagrangien effectif selon

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \dots \quad (2.127)$$

On ordonnera également les diagrammes de Feynman suivant la même règle, ce qui correspond à un développement en boucles. Le point important est que le lagrangien effectif commence à nouveau avec l'ordre  $\mathcal{O}(p^2)$ .

Ceci nécessite néanmoins une qualification: nous avons discuté dans le cas du mécanisme de Higgs élémentaire les termes de Yukawa, donnant des masses aux fermions en jauge unitaire. Dans le cadre des théories effectives sans Higgs, le terme correspondant est du type

$$\overline{\chi_R} \Sigma \chi_L + \overline{\chi_L} \Sigma^\dagger \chi_R = \mathcal{O}(p^1). \quad (2.128)$$

A moins que la masse apparaissant en facteur de ce terme ne soit petite devant l'échelle  $\Lambda$ , cet opérateur apparaît avant le terme cinétique, ce qui pose problème vis-à-vis de la formule de comptage. On doit donc trouver une symétrie approximative telle que cette masse disparaisse dans la limite appropriée.

11. Nous n'incluons que le cas des GBs et non des PGBs.

## 2.5 Résumé

Dans ce chapitre, nous avons présenté un condensé des idées fondamentales nécessaires à l'élaboration de la  $\chi$ PT. On construit une théorie effective à basse énergie basée sur une exploitation systématique de la symétrie chirale de la QCD dans la limite de masses de quarks nulles. Les variables appropriées sont les états physiques légers: les GBs dus à la brisure de la symétrie chirale. La théorie effective contient tous les opérateurs permis par la symétrie. On doit cependant les ordonner selon un développement. Il se trouve que la classification selon la dimension physique des opérateurs est inappropriée, du fait de la réalisation non-linéaire de la symétrie, qui implique automatiquement que le terme cinétique des GBs doit s'accompagner d'interactions entre un nombre arbitraire de particules, ayant donc une dimension physique arbitrairement grande. Ceci est lié à la présence de la constante dimensionnée  $f_0$ .

En revanche, le fait que les interactions des GBs soient faibles dans la limite des faibles impulsions permet d'envisager un développement en puissance des dérivées. Le lagrangien est donc organisé de cette manière. Etudiant l'ordre auquel un diagramme donné contribue, on constate que le développement précédent est lié à un développement en boucles. La différence avec les théories renormalisables est que de nouveaux opérateurs apparaissent à chaque ordre. Ceci est nécessaire pour absorber les infinités présentes dans les boucles et obtenir des résultats finis et indépendants de l'échelle de renormalisation.

L'inclusion de champs de jauge et de fermions (dont les masses peuvent rester petites car elles sont protégées par une symétrie) comme variables dynamiques dans le théorie effective est également décrite. Nous précisons en quoi le comptage chiral pour les différents objets est contraint par la nécessité de reproduire la formule de comptage de Weinberg, généralisant le développement dérivatif pour inclure d'autres paramètres de développement, tout en permettant une organisation systématique des termes du lagrangien mais surtout des différents diagrammes en fonction du nombre de boucles. On peut ainsi formuler un développement systématique, donnant des expressions finies pour les observables grâce à la procédure de renormalisation, chaque ordre permettant d'améliorer la précision.



# Chapitre 3

## Yang-Mills massif: le cas SU(2)

La littérature contient des traitements avancés de la partie bosonique du secteur électrofaible dans le cadre des théories effectives [NS00]. Un des objectifs principaux de ces travaux était l'étude du raccordement entre la LEET et un modèle sous-jacent particulier: la limite de Higgs lourd. Pour cette raison, l'accent était mis sur l'invariance de jauge, et des sources étaient construites qui généraient des opérateurs invariants de jauge, tandis que les variables d'intégration, incluant à la fois les champs de Goldstone et les champs de jauge restaient dépendantes de jauge.

Nous choisissons de travailler directement dans la jauge unitaire, ou, plus exactement, avec des champs invariants sous les symétries dynamiques (excepté éventuellement sous les symétries U(1), que l'on sait traiter sans introduire de fantômes). Bien que cette formulation ne soit pas utilisée dans le cas du SM, pour les raisons mentionnées en 1.5.1, elle est tout-à-fait adaptée ici, et conduit à un nombre de diagrammes plus faibles, n'incluant que des particules physiques. Comme application du programme des LEETs présentées au chapitre 2, nous considérons le cas d'une théorie de jauge SU(2) sujette à un mécanisme de Higgs dynamique sans boson de Higgs physique. Nous décrivons la renormalisation de la fonctionnelle génératrice à une boucle par la méthode du noyau de chaleur, ainsi que les fonctions à deux points.

Puisque le lagrangien  $\mathcal{O}(p^2)$ , après redéfinition des champs, correspondra à celui d'une théorie de Yang-Mills massive, nous utiliserons cette dénomination. L'application à une situation physique nécessite cependant que la masse puisse être considérée comme petite devant l'échelle de la nouvelle physique: ceci nécessaire afin de pouvoir utiliser la LEET. Le formalisme des LEETs sera alors utile pour l'étude de processus mettant en jeu des énergies de l'ordre de grandeur des masses des bosons vecteurs, supposées être faibles devant l'échelle de la nouvelle physique.

### 3.1 Lagrangien effectif

On construit le lagrangien effectif d'une théorie de Yang-Mills SU(2) directement couplée aux courants  $J_R^{a\mu}$  d'une symétrie globale  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  spontanément brisée vers  $SU(2)_{L+R}$ . On se limite aux termes invariants sous  $CP$ . Notons en particulier que les termes topologiques seront toujours égaux à zéro, puisque notre approche est perturbative autour de la situation où les champs sont égaux à zéro.

#### 3.1.1 Ordre $\mathcal{O}(p^2)$

On considère la fonctionnelle génératrice d'une théorie caractérisée par la brisure spontanée de la symétrie globale  $SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_{L+R}$ . Cette même fonctionnelle génératrice est représentée à basse énergie en termes d'un lagrangien effectif dépendant des trois GBs correspondant à cette brisure, comme décrit en 2.3. On étend le champ d'application de cette LEET en couplant aux GBs des champs de Yang-Mills en interactions faibles. Nous considérons le cas où les courants conservés  $J_R^{a\mu}$  sont ainsi couplés, tandis que les courants de symétrie  $J_L^{a\mu}$  ne le sont pas: les sources classiques correspondantes restent en tant que variables dont va dépendre la fonctionnelle génératrice finale  $\Gamma[L_\mu^a]$ . En revanche, les sources  $R_\mu^a$  deviennent des variables d'intégration  $G_\mu^a$

$$R_\mu = gG_\mu. \quad (3.1)$$



On intègre alors sur les fluctuations des champs dynamiques  $G_\mu^a$

$$e^{i\Gamma[L_\mu^a]} = \int d[\Sigma] d[G_\mu^a] e^{i\int dx \mathcal{L}_{e\uparrow}[\Sigma, L_\mu^a, G_\mu^a]}. \quad (3.2)$$

On suppose que l'échelle de ces fluctuations relativement aux sources qui génèrent les courants<sup>1</sup> de la symétrie globale est faible. Ceci va être mesurée par la constante de couplage  $g$  apparaissant dans (3.1), qui donne le facteur de conversion entre les sources et les champs de jauge. Nous supposons cette constante de couplage suffisamment petite pour être considérée comme un paramètre de développement, comptabilisé comme  $\mathcal{O}(p^1)$ , et pour que les fluctuations des champs de jauge ne restaurent pas la symétrie. Celle-ci reste alors brisée; le couplage des champs de Yang-Mills aux GBs résultera, comme nous le verrons explicitement, en un mécanisme de Higgs. Le comptage du champ  $G_\mu^a$  est par conséquent  $\mathcal{O}(p^0)$ .

Au lieu de construire un lagrangien effectif fonction des variables  $\{\Sigma, L_\mu^a, R_\mu^a\}$  où  $\Sigma \in \text{SU}(2)$  et invariant sous (2.56-2.58), on doit à présent construire un lagrangien effectif dépendant des variables  $\{\Sigma, L_\mu^a, G_\mu^a\}$  invariant sous

$$\Sigma(x) \mapsto {}^t\Sigma(x) = L(x) \Sigma(x) R(x)^\dagger, \quad (3.3)$$

$$L_\mu(x) \mapsto {}^tL_\mu(x) = L(x) L_\mu(x) L(x)^\dagger + i L(x) \partial_\mu L(x)^\dagger, \quad (3.4)$$

$$G_\mu(x) \mapsto {}^tG_\mu(x) = R(x) G_\mu(x) R(x)^\dagger + \frac{i}{g} R(x) \partial_\mu R(x)^\dagger. \quad (3.5)$$

Il nous faut reprendre les briques élémentaires covariantes (2.61-2.62) dans ce cas. Certaines sont modifiées et deviennent

$$D_\mu \Sigma = \partial_\mu \Sigma - i L_\mu \Sigma + i g \Sigma G_\mu = \mathcal{O}(p^1), \quad (3.6)$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu - i g [G_\mu, G_\nu] = \mathcal{O}(p^1), \quad (3.7)$$

Le lien entre cette construction et le secteur électrofaible est le suivant: nous construisons ici la LEET du secteur bosonique pour la brisure électrofaible sans Higgs physique, dans la limite où le couplage de l'hypercharge est nul (angle de Weinberg nul). En effet, on peut faire le rapprochement entre les propriétés de transformation de la matrice  $\Sigma$  et celles de  $\Phi^\dagger$  dans le cas du SM (voir section 1.3.2). Parmi les différences entre les deux approches, on note l'absence de la composante radiale dans le cas de la matrice  $\Sigma$ , qui est unitaire. D'autre part, le principe de construction de la théorie est ici différent, et a été décrit au chapitre 2.

Le lagrangien  $\mathcal{O}(p^2)$  contient deux termes indépendants

$$\mathcal{L}_2 = \frac{f^2}{4} \langle D_\mu \Sigma^\dagger D^\mu \Sigma \rangle - \frac{1}{2} \langle G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \rangle. \quad (3.8)$$

L'écriture du terme cinétique des champs de Yang-Mills dans (3.8) avec la normalisation canonique équivaut à définir la normalisation de  $g$ , comptabilisé comme  $\mathcal{O}(p^1)$ . Notons que  $G_{\mu\nu}$  est un objet bien défini dans la limite  $g \rightarrow 0$  puisque les termes inhomogènes en  $1/g$  disparaissent dans la loi de transformation correspondante. La division par une constante de couplage pour  $R_{\mu\nu}$  n'a en revanche pas de sens (voir l'annexe D.1).

Du lagrangien  $\mathcal{L}_2$  on obtient, par variation des champs, les équations de mouvement classiques suivantes pour les champs vectoriels

$$D_\mu G^{\mu\nu} - i g \frac{f^2}{4} \Sigma^\dagger D^\nu \Sigma = 0. \quad (3.9)$$

Cette équation nous sera utile par la suite pour éliminer les termes redondants dans les ordres supérieurs du lagrangien effectif. Les équations de mouvement pour les GBs ne sont pas indépendantes de celles des champs de jauge, puisque l'on peut les obtenir par application de la dérivée covariante sur (3.9)

$$\Sigma^\dagger D^\mu D_\mu \Sigma - (D_\mu D^\mu \Sigma)^\dagger \Sigma = 0. \quad (3.10)$$

---

1. Ces courants sont normalisés d'après la relation de commutation (2.14), due à la structure non-abélienne.

L'expression des courants de symétrie est donnée par

$$\left. \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta L_\mu^a} \right|_{L_\sigma^b=0} = -i g \frac{f^2}{4} \langle \tau^a (\Sigma (\partial_\mu - i g G_\mu) \Sigma^\dagger) \rangle. \quad (3.11)$$

### 3.1.2 Ordre $\mathcal{O}(p^3)$

A cet ordre, on ne peut construire que deux invariants indépendants, dont l'un est supprimé par une échelle inconnue. La seule échelle dimensionnée à notre disposition dans la théorie effective étant  $f$ , nous utiliserons cette dernière pour construire des opérateurs de la bonne dimension. On s'attend à ce que l'échelle appropriée soit en fait plus grande, d'ordre  $\Lambda \sim 4\pi f$  ou plus (voir les discussions précédant (2.96)). Les deux opérateurs  $\mathcal{O}(p^3)$  sont

$$\mathcal{O}_1^{(3)} = \langle G_{\mu\nu} \Sigma^\dagger L^{\mu\nu} \Sigma \rangle, \quad (3.12)$$

$$\mathcal{O}_2^{(3)} = \frac{1}{f^2} \langle G_{\mu\nu} G^{\rho\mu} G_\nu^\rho \rangle. \quad (3.13)$$

En particulier, notons que l'analogie du terme  $L_9$  dans le lagrangien de Gasser-Leutwyler (2.80) peut être éliminé par utilisation des équations de mouvement, en négligeant la contribution des termes de surface. Puisque ceci constitue notre premier exemple, nous le montrons explicitement. Le terme en question s'écrit

$$i \langle G_{\mu\nu} D^\mu \Sigma^\dagger D^\nu \Sigma \rangle = \mathcal{O}(p^3). \quad (3.14)$$

A un terme de surface près, on peut le réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} -i \langle D^\mu G_{\mu\nu} \Sigma^\dagger D^\nu \Sigma \rangle - \frac{i}{2} \langle G_{\mu\nu} \Sigma^\dagger [D^\mu, D^\nu] \Sigma \rangle &= -g \frac{f^2}{4} \langle D_\mu \Sigma^\dagger D^\mu \Sigma \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle G_{\mu\nu} \Sigma^\dagger L^{\mu\nu} \Sigma \rangle + \frac{g}{2} \langle G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \rangle. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ceci est dû au fait que la connexion  $R_\mu$  est ici un champ dynamique  $gG_\mu$ : on a donc des équations de mouvement supplémentaires<sup>2</sup> pour ré-exprimer certains termes en fonction des autres. On peut utiliser les équations de mouvement pour écrire ce terme  $\mathcal{O}(p^3)$  en fonction d'une combinaison linéaire des termes  $\mathcal{O}(p^2)$  multipliés par  $g$  et d'un terme  $\mathcal{O}(p^3)$  (il s'agit de l'analogie du terme  $L_{10}$  de (2.77)). Ceci montre que le nombre de constantes indépendantes dans ce secteur n'est pas le même lorsque l'on étudie l'EWSB, par rapport au cas de la  $\chi$ PT [NS00]. D'autre part, les termes n'apparaissent pas au même ordre chirale, puisque l'on peut maintenant diviser le tenseur de Faraday  $R_{\mu\nu}$  par  $g = \mathcal{O}(p^1)$ , tandis que cette constante n'existait pas dans le cas de la  $\chi$ PT.

### 3.1.3 Ordre $\mathcal{O}(p^4)$

Appliquant systématiquement les identités algébriques, ainsi que des intégrations par parties et les équation de mouvement (3.9) afin de réduire les termes  $\mathcal{O}(p^4)$  à un nombre minimal donnant des contributions indépendantes, on arrive à la liste suivante de quinze opérateurs

$$\mathcal{O}_1^{(4)} = \langle L_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \rangle, \quad (3.16)$$

$$\mathcal{O}_2^{(4)} = \frac{1}{f^2} \langle D_\rho G_{\mu\nu} D^\rho G^{\mu\nu} \rangle, \quad (3.17)$$

$$\mathcal{O}_3^{(4)} = i \langle L_{\mu\nu} D^\mu \Sigma D^\nu \Sigma^\dagger \rangle, \quad (3.18)$$

$$\mathcal{O}_4^{(4)} = \frac{i}{f^2} \langle L_{\mu\nu} G^{\rho\mu} G_\rho^\nu \rangle,$$

<sup>2</sup>. Plus précisément, on dispose de plus nombreuses possibilités de redéfinitions des champs laissant la physique invariante [SF95].

$$\mathcal{O}_5^{(4)} = \langle D_\mu \Sigma^\dagger D^\mu \Sigma \rangle^2, \quad (3.19)$$

$$\mathcal{O}_6^{(4)} = \langle D_\mu \Sigma^\dagger D_\nu \Sigma \rangle \langle D^\mu \Sigma^\dagger D^\nu \Sigma \rangle, \quad (3.20)$$

$$\mathcal{O}_7^{(4)} = \frac{1}{f^2} \langle G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \rangle \langle D_\rho \Sigma^\dagger D^\rho \Sigma \rangle, \quad (3.21)$$

$$\mathcal{O}_8^{(4)} = \frac{1}{f^2} \langle G_{\mu\nu} G^{\mu\rho} \rangle \langle D^\nu \Sigma^\dagger D_\rho \Sigma \rangle, \quad (3.22)$$

$$\mathcal{O}_9^{(4)} = \frac{1}{f^2} \langle G_{\mu\nu} \Sigma^\dagger D_\rho \Sigma \rangle \langle G^{\mu\nu} \Sigma^\dagger D^\rho \Sigma \rangle, \quad (3.23)$$

$$\mathcal{O}_{10}^{(4)} = \frac{1}{f^2} \langle G_{\mu\nu} \Sigma^\dagger D_\rho \Sigma \rangle \langle G^{\mu\rho} \Sigma^\dagger D^\nu \Sigma \rangle, \quad (3.24)$$

$$\mathcal{O}_{11}^{(4)} = \frac{1}{f^2} \langle G_{\mu\nu} \Sigma^\dagger D^\nu \Sigma \rangle \langle G^{\mu\rho} \Sigma^\dagger D_\rho \Sigma \rangle, \quad (3.25)$$

$$\mathcal{O}_{12}^{(4)} = \frac{1}{f^4} \langle G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \rangle \langle G_{\rho\sigma} G^{\rho\sigma} \rangle, \quad (3.26)$$

$$\mathcal{O}_{13}^{(4)} = \frac{1}{f^4} \langle G_{\mu\nu} G^{\mu\rho} \rangle \langle G^{\sigma\nu} G_{\sigma\rho} \rangle, \quad (3.27)$$

$$\mathcal{O}_{14}^{(4)} = \frac{1}{f^4} \langle G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma} \rangle \langle G^{\mu\nu} G^{\rho\sigma} \rangle, \quad (3.28)$$

$$\mathcal{O}_{15}^{(4)} = \frac{1}{f^4} \langle G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma} \rangle \langle G^{\mu\rho} G^{\nu\sigma} \rangle. \quad (3.29)$$

Précisons par ailleurs que les termes déjà introduits aux ordres inférieurs, mais multipliés par des puissances de  $g$  seront comptabilisés comme  $\mathcal{O}(p^4)$ . Puisque ce ne sont pas des nouveaux opérateurs, ils n'apparaissent pas dans la liste (3.16-3.29). Ceci signifie que les constantes apparaissant en facteur des opérateurs s'exprimeront en réalité comme un développement en puissances de  $g$ .

Le lagrangien effectif jusqu'à l'ordre  $\mathcal{O}(p^4)$  s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \sum_{n=1}^2 a_n \mathcal{O}_n^{(2)} + \sum_{n=1}^2 b_n \mathcal{O}_n^{(3)} + \sum_{n=1}^{15} c_n \mathcal{O}_n^{(4)} + \mathcal{O}(p^5), \quad (3.30)$$

avec

$$\mathcal{O}_1^{(2)} = -\frac{1}{2} \langle G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \rangle, \quad (3.31)$$

$$\mathcal{O}_2^{(2)} = \frac{f^2}{4} \langle D_\mu \Sigma^\dagger D^\mu \Sigma \rangle. \quad (3.32)$$

Les constantes apparaissant dans l'expression (3.30) prennent en réalité la forme de séries en puissances de  $g$

$$a_n = a_{n,0} + g a_{n,1} + g^2 a_{n,2} + \mathcal{O}(g^3), \quad (3.33)$$

$$b_n = b_{n,0} + g b_{n,1} + \mathcal{O}(g^2), \quad (3.34)$$

$$c_n = c_{n,0} + \mathcal{O}(g^1), \quad (3.35)$$

où la normalisation choisie en (3.31-3.32) pour les opérateurs  $\mathcal{O}(p^2)$  fixe

$$a_{n,0} = 1. \quad (3.36)$$

## 3.2 Opérateurs invariants de jauge

Les interactions entre les GBs et les champs de jauge ont pour conséquence physique le mécanisme de Higgs. Nous souhaitons utiliser au maximum une écriture en termes de champs physiques. Ceci est en général formulé comme un passage à la jauge unitaire. Ici, nous utilisons des redéfinitions des champs, mieux adaptées à notre approche.

### 3.2.1 Redéfinitions des champs

Nous définissons des champ vectoriels invariants sous la symétrie dynamique  $SU(2)_R$ , que nous appellerons  $W_\mu$ . Nous effectuerons ensuite un changement de variable de  $G_\mu$  vers ces nouveaux champs. Dans une théorie où le mécanisme de Higgs a lieu, une telle redéfinition va permettre d'obtenir un lagrangien indépendant des champs de Goldstone. La raison en est que la redéfinition des champs utilisée est formellement une transformation de jauge dans laquelle les GBs interviennent en tant que matrice de transformation  $SU(2)_R$ . Si le lagrangien original est invariant sous la symétrie  $SU(2)_R$ , on trouvera donc que l'écriture en termes des nouvelles variables n'implique plus les GBs  $\Sigma$ . Explicitement, on utilise la définition suivante, qui peut être vue comme une transformation de Stückelberg *inverse* [GKK93] pour le cas non-abélien

$$\begin{aligned} g W_\mu &\equiv i \Sigma D_\mu \Sigma^\dagger \\ &= i \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger + g \Sigma G_\mu \Sigma^\dagger - L_\mu. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Précisons de nouveau que, bien que cette écriture ressemble formellement à une transformation de jauge, l'intégrale fonctionnelle impliquera en réalité toutes les valeurs de  $\Sigma \in SU(2)$ . Par conséquent, (3.37) n'est donc pas un choix de jauge [GJ72, GKK93, NS00]. On effectue ensuite un changement de variables selon

$$\{\Sigma, G_\mu\} \longrightarrow \{\Sigma, W_\mu\}. \quad (3.38)$$

Notons que le jacobien de cette transformation est égal à l'unité [Nyf], car on n'a pas ici de composante radiale correspondant au boson de Higgs, et donc pas de termes de Lee-Yang comme on en aurait dans le cas du SM.

Les champs vectoriels que nous venons de définir sont invariants sous les transformations de jauge  $SU(2)_R$ , mais se transforment comme un triplet (représentation adjointe) de la symétrie  $SU(2)_L$ <sup>3</sup> (qui est en réalité globale, mais dont nous avons étendu les transformations au groupe local pour définir la fonctionnelle génératrice, voir section 2.2)

$$W_\mu \longmapsto L W_\mu L^\dagger. \quad (3.39)$$

Les charges des champs de jauge sont donc écrantées, ce qui est mis en évidence dans cette écriture: c'est là un des aspects du mécanisme de Higgs. Le point important est que l'on peut réécrire tous les termes du lagrangien en fonction de variables invariantes sous la symétrie  $SU(2)_R$ . En effet, la définition (3.37) permet d'absorber toutes les occurrences de la matrice  $\Sigma$  dans le lagrangien  $\mathcal{L}_2$ : on obtient en appliquant les redéfinitions des champs à  $\mathcal{L}_2$  donné par (3.8)

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2} \langle W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \rangle + \frac{f^2}{4} \langle (g W_\mu) (g W^\mu) \rangle - \frac{1}{g} \langle W_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \rangle - \frac{1}{2g^2} \langle L_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \rangle. \quad (3.40)$$

Dans cette écriture, on a utilisé la définition

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= i \Sigma [D_\mu, D_\nu] \Sigma^\dagger \\ &= D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu - i g [W_\mu, W_\nu], \end{aligned} \quad (3.41)$$

avec la définition de la dérivée covariante

$$D_\mu W_\nu = \partial_\mu W_\nu - i g [L_\mu, W_\nu] \longmapsto L (D_\mu W_\nu) L^\dagger. \quad (3.42)$$

La propriété de transformation pour  $W_{\mu\nu}$  est la suivante

$$W_{\mu\nu} \longmapsto L W_{\mu\nu} L^\dagger. \quad (3.43)$$

---

3. Ceci a donné lieu à l'appellation « transmutation de symétrie » [CS86]. La symétrie  $SU(2)_L$  joue ici le rôle de la symétrie custodiale introduite en 1.3.2. La symétrie (globale) sous laquelle les champs vecteurs massifs se transforment comme un triplet est donc distincte de la symétrie de Yang-Mills [EB64, Eli75, O'R98, Cha98].

L'examen de l'expression (3.40) du lagrangien  $\mathcal{L}_2$  permet de reconnaître que l'on a affaire à un champ de Yang-Mills massif. On pose pour cela les sources égales à zéro <sup>4</sup>, ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2|_{L_\mu^a=0} = & -\frac{1}{2} \langle (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - i g [W_\mu, W_\nu]) (\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu - i g [W^\mu, W^\nu]) \rangle \\ & + M^2 \langle W_\mu W^\mu \rangle, \end{aligned} \quad (3.44)$$

moyennant l'identification

$$M^2 = \frac{g^2 f^2}{4} = \mathcal{O}(p^2). \quad (3.45)$$

Dans cette dernière équation, le comptage chirale nécessaire à la cohérence du développement (voir section 2.4.2.1) apparaît automatiquement. Ceci est dû au fait que la masse n'est pas introduite à la main, mais *via* le mécanisme de Higgs: la structure de Yang-Mills garantit que cette masse n'obtiendra que des renormalisations en puissances de  $g$  (voir à ce sujet la discussion des divergences quartiques dans l'annexe D.3). L'équation (3.45) est cruciale pour la LEET: on ne pourra étudier une théorie de Yang-Mills massive dans ce cadre que si la masse est petite devant l'échelle de la nouvelle physique, permettant de considérer cette masse comme paramètre de développement. Cette équation illustre également que la cohérence de la LEET demande de plus de considérer des impulsions du même ordre de grandeur que la masse des bosons vecteurs.

Notons que les coefficients des deux derniers termes de (3.40) sont fixés (voir à ce sujet l'annexe D.1). Les équations de mouvement classiques obtenues avec (3.40) s'écrivent

$$\mathcal{D}_\mu W^{\mu\nu} + M^2 W^\nu + \frac{1}{g} \mathcal{D}_\mu L^{\mu\nu} = 0, \quad (3.46)$$

avec la définition de la dérivée  $\mathcal{D}_\mu$  pour un objet  $X$  dans la représentation adjointe de  $SU(2)_L$

$$\mathcal{D}_\mu X = \partial_\mu X - i [g W_\mu + L_\mu, X]. \quad (3.47)$$

Précisons que si l'on extrait l'expression des courants  $J_L^{a\mu}$  en terme de ces variables, on obtient les identités champ-courant usuelles [Sak69, CS86]

$$J_L^{a\mu} = \left. \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta L_\mu^a} \right|_{L_\sigma^b=0} = -\frac{M^2}{g} W^{a\mu} + \mathcal{O}(p^2). \quad (3.48)$$

On peut vérifier explicitement, utilisant les équations de mouvement (3.46) que ce courant est effectivement conservé

$$\partial_\mu J_L^{a\mu} \Big|_{L_\sigma^b=0} = 0. \quad (3.49)$$

On peut réécrire le lagrangien effectif tout entier en termes de ces variables invariantes sous  $SU(2)_R$ , soit en substituant directement dans les expressions données en 3.1, soit en utilisant les règles déduites à l'annexe D.2 pour écrire directement le lagrangien en termes de ces variables. Le point important est que le lagrangien effectif, réécrit en termes des variables  $W_\mu$ , ne dépend plus de la matrice  $\Sigma$  <sup>5</sup>, on peut donc effectuer l'intégrale fonctionnelle sur les champs de Goldstone, résultant en un facteur multiplicatif constant. Finalement, on voit que la fonctionnelle génératrice (3.2) s'écrit

$$e^{i\Gamma[L_\mu^a]} = \int d[W_\mu^a] e^{i \int dx \mathcal{L}'_c[L_\mu^a, W_\mu^a]}, \quad (3.50)$$

4. Les sources  $R_\mu^a$  nous ont servi d'outil technique pour introduire le couplage des champs de Yang-Mills aux courants conservés. En revanche, les sources  $L_\mu^a$  restent en tant que sources pour extraire les fonctions de Green des courants  $J_L^{a\mu}$  de la théorie sous-jacente. Ces fonctions de Green feront intervenir l'échange de bosons  $W_\mu^a$  massifs, étant donnée l'identité champ-courant (3.48). Cependant, si l'on souhaite uniquement étudier les fonctions de Green des champs  $W_\mu^a$  et non le lien avec la théorie sous-jacente, on peut introduire une source couplant directement aux champs  $W_\mu^a$ .

5. En présence d'anomalies, ceci nécessite une étude détaillée, qui sera présentée au chapitre 6.

où  $\mathcal{L}'_{\text{eff}}$  est juste la réécriture du lagrangien effectif en terme des nouvelles variables, selon

$$\mathcal{L}'_{\text{eff}}[L_\mu^a, W_\mu^a] = \mathcal{L}_{\text{eff}}[\Sigma, L_\mu^a, G_\mu^a]. \quad (3.51)$$

### 3.2.2 Opérateur des fluctuations quadratiques

Afin de calculer les contributions à une boucle dues à  $\mathcal{L}_2$ , on décompose le champ  $W_\mu$  selon

$$W_\mu = \bar{W}_\mu + \Delta_\mu, \quad (3.52)$$

en un champ de fond classique  $\bar{W}_\mu$  vérifiant les équations d'Euler-Lagrange (3.46) et une fluctuation quantique  $\Delta_\mu$ . On considère alors le terme quadratique en  $\Delta_\mu$  dans  $\mathcal{L}_2$ , qui va nous permettre de calculer la contribution à une boucle. Définissant par le symbole  $\bar{Y}$  l'expression obtenue en remplaçant dans une fonctionnelle  $Y$  le champ total par le champ classique  $W_\mu \rightarrow \bar{W}_\mu$ , par exemple

$$\bar{W}_{\mu\nu} = D_\mu \bar{W}_\nu - D_\nu \bar{W}_\mu - i g [\bar{W}_\mu, \bar{W}_\nu], \quad (3.53)$$

$$\bar{\mathcal{D}}_\mu X = \partial_\mu X - i [L_\mu + g \bar{W}_\mu, X], \quad (3.54)$$

on peut écrire, après quelques réarrangements

$$\mathcal{L}_2 = \langle \Delta^\mu \{ \eta_{\mu\nu} (\bar{\mathcal{D}}^\rho \bar{\mathcal{D}}_\rho + M^2) - \bar{\mathcal{D}}_\mu \bar{\mathcal{D}}_\nu \} \Delta^\nu \rangle - 2i \langle \Delta^\mu [g \bar{W}_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}, \Delta^\nu] \rangle + \mathcal{O}(\Delta^3). \quad (3.55)$$

A ce stade, il est commode d'utiliser une écriture en termes de vecteurs à trois composantes pour les champs, au lieu des matrices  $2 \times 2$  hermitiennes. On définit ainsi la matrice  $3 \times 3$   $\Gamma_\nu^{ab}$  selon

$$\Gamma_\mu^{ab} \equiv 2i \left\langle \left[ \frac{\tau^a}{2}, \frac{\tau^b}{2} \right] (g \bar{W}_\mu + L_\mu) \right\rangle = -\varepsilon^{abc} (g \bar{W}_\mu^c + L_\mu^c), \quad (3.56)$$

ce qui permet de définir la dérivée covariante  $d_\mu$ , à partir de

$$\begin{aligned} d_\mu^{ab} \Delta_\nu^b &\equiv \langle \tau^a \bar{\mathcal{D}}_\mu \Delta_\nu \rangle \\ &= \partial_\mu \Delta_\nu^a + \Gamma_\mu^{ab} \Delta_\nu^b. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Notons que l'on a

$$[d_\mu, d_\nu]^{ab} \Delta_\rho^b = \Gamma_{\mu\nu}^{ab} \Delta_\rho^b, \quad (3.58)$$

avec

$$\Gamma_{\mu\nu}^{ab} \equiv 2i \left\langle \left[ \frac{\tau^a}{2}, \frac{\tau^b}{2} \right] (g \bar{W}_{\mu\nu} + L_{\mu\nu}) \right\rangle = -\varepsilon^{abc} (g \bar{W}_{\mu\nu}^c + L_{\mu\nu}^c), \quad (3.59)$$

Cette écriture permet d'exprimer le terme quadratique de  $\mathcal{L}_2$  sous une forme utile pour la suite

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \Delta_\mu^a \mathcal{F}_\nu^{\mu ab} \Delta^{\nu b} + \mathcal{O}(\Delta^3), \quad (3.60)$$

avec

$$\mathcal{F}_\nu^{\mu ab} = \eta_\nu^\mu (d^\rho d_\rho + M^2) - d^\mu d_\nu + 2 \Gamma_\nu^\mu. \quad (3.61)$$

On peut également vérifier certaines identités du type

$$[d_\rho, \Gamma_{\mu\nu}]^{ab} = 2i \left\langle \left[ \frac{\tau^a}{2}, \frac{\tau^b}{2} \right] (g \bar{\mathcal{D}}_\rho \bar{W}_{\mu\nu} + \bar{\mathcal{D}}_\rho L_{\mu\nu}) \right\rangle. \quad (3.62)$$

Le résultat de l'intégrale fonctionnelle à une boucle est

$$\int d[\Delta_\mu^a] e^{\frac{i}{2} \int dx dy \Delta_\mu^a(x) \Delta^{\mu b}(y) \mathcal{F}_\nu^{\mu ab}(x) \delta^{(4)}(x-y)} = e^{i \text{Tr} \ln \mathcal{F}}, \quad (3.63)$$

où la trace fonctionnelle est définie par

$$\text{Tr} \ln \mathcal{F} = \int dx \left( \mathcal{F}_\mu^{\mu aa}(x) \delta^{(4)}(x-y) \right) \Big|_{y=x}. \quad (3.64)$$

La trace fonctionnelle sera en général divergente, les divergences ultraviolettes provenant de la limite de coïncidence  $y \rightarrow x$ .

Dans la suite, nous utiliserons la notation  $\mathcal{F}$  en omettant les indices et la variable  $x$ . Dans tous les cas, il faudra lire le placement d'indice de Lorentz suivant

$$\mathcal{F}_\nu^{\mu ab}(x) \xrightarrow{\text{abréviation}} \mathcal{F}. \quad (3.65)$$

### 3.3 Renormalisation à une boucle

Nous décrivons la procédure de calcul à une boucle ainsi que les résultats, démontrant explicitement que ces calculs sont faisables « en jauge unitaire », et que la procédure de renormalisation donne des résultats finis. En effet, étant donné le propagateur pour un champ vectoriel massif, il n'est pas évident *a priori*, même à une boucle, que le nombre de divergences dans la fonctionnelle génératrice soit fini, ni que ces divergences puissent effectivement être absorbées dans les opérateurs présent dans notre lagrangien.

Nous avons vu ci-dessus que le lagrangien à l'ordre  $\mathcal{O}(p^2)$  avec lequel nous allons calculer les diagrammes à une boucle était identique, une fois écrit en termes des opérateurs invariants sous la symétrie dynamique, au lagrangien composé des opérateurs de dimension inférieure ou égale à quatre d'une théorie de Yang-Mills massive. La littérature indique que les calculs à une boucle effectués avec un tel lagrangien (et donc en jauge unitaire) comportent plus de divergences que le lagrangien original ne peut en absorber: les fonctions de Green ne sont pas finies. En revanche, les infinités se compensent lorsque l'on évalue des éléments de la matrice  $S$  [Wei71, APQ72, APQ73, BP99]. Dans le cas d'une LEET, on doit pouvoir absorber toutes les divergences, puisque tous les opérateurs permis par la symétrie sont présents. De plus, la formule de comptage de Weinberg nous dit que les contributions à une boucle de  $\mathcal{L}_2$  seront renormalisées par les opérateurs de  $\mathcal{L}_4$ . Nous vérifions explicitement cette affirmation, et donnons la valeur des contre-termes nécessaires pour obtenir des résultats finis. Pour ce faire, nous adaptons la méthode dite du *noyau de la chaleur*, utilisée par exemple en  $\chi$ PT [GL84, DGH92] pour obtenir en une expression fermée toutes les divergences à une boucle.

#### 3.3.1 Méthode du noyau de la chaleur

En premier lieu, nous nous intéressons au calcul de l'ensemble des divergences à une boucle. Une procédure « élégante » pour obtenir ces dernières existe sous la méthode dite du *noyau de chaleur* [GL84, Bal89]. Plus précisément, nous utiliserons une adaptation des méthodes de [BV85] à notre cas. On peut en réalité présenter deux calculs distinct, reposant sur des développements différents. Nous choisissons ici de présenter la méthode la plus rapide, bien qu'elle soit d'applicabilité restreinte, car elle permet de suivre le décompte des polarisations possibles pour un champ vectoriel massif. Une autre méthode, suivant de plus près la logique générale de la référence [BV85], est exposée à l'annexe E.

Le point de départ est l'expression suivante pour le logarithme d'un opérateur (voir annexe E.1), permettant d'en extraire les singularités à courtes distances par la méthode de Schwinger-DeWitt

$$\ln \mathcal{F} = - \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s} e^{-is\mathcal{F}}, \quad (3.66)$$

avec la modification sous-entendue  $M^2 \rightarrow M^2 - i\epsilon$  pour assurer la convergence de l'intégrale. Des singularités vont réapparaître plus tard dans l'intégration sur  $s$ . En réalité, nous n'appliquerons pas directement la formule (3.66) à l'opérateur  $\mathcal{F}$  lui-même, mais à des objets dérivés: la difficulté essentielle réside dans la présence de l'opérateur différentiel  $d^\mu d_\nu$ , non-diagonal en les indices de Minkowski dans l'expression (3.61) de  $\mathcal{F}$  (opérateur *non-minimal*). Pour se ramener au cas d'un opérateur plus simple (*minimal*), on remarque, en définissant

$$\mathcal{K}_\nu^\mu = \eta_\nu^\mu + \frac{d^\mu d_\nu}{M^2}, \quad (3.67)$$

que l'on peut écrire

$$\mathcal{F}_\nu^\mu \mathcal{K}_\rho^\nu = \mathcal{D}_\nu^\mu + \mathcal{M}_\nu^\mu, \quad (3.68)$$

où apparaît l'opérateur *minimal*  $\mathcal{D}_\nu^\mu$

$$\mathcal{D}_\nu^\mu = \eta_\nu^\mu (d^\rho d_\rho + M^2) + 2\Gamma_\nu^\mu, \quad (3.69)$$

et un opérateur ne comportant qu'une dérivée libre

$$\mathcal{M}_\nu^\mu = \frac{1}{M^2} [d_\rho, \Gamma^{\rho\mu}] d_\nu. \quad (3.70)$$

On va alors déterminer les divergences dans l'expression  $\text{Tr} \ln \mathcal{F}$  en utilisant la relation

$$\ln \mathcal{F} = \ln (\mathcal{D} + \mathcal{M}) - \ln \mathcal{K}. \quad (3.71)$$

Il se trouve que l'on peut traiter les deux termes du membre de droite. En particulier, le terme  $\ln \mathcal{K}$  se réduisant à la contribution d'un champ scalaire, qui sera donc soustraite à la contribution de  $\ln (\mathcal{D} + \mathcal{M})$ , correspondant à quatre polarisations, et où la structure non-abélienne sera reconnaissable.

### 3.3.1.1 Contribution scalaire

Nous avons dit que la contribution  $\text{Tr} \ln \mathcal{K}$  correspondait à celle d'un champ scalaire. Ceci se démontre en utilisant l'invariance de la trace fonctionnelle sous les permutations circulaires [Bal89]

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln \mathcal{K} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n M^{2n}} \text{Tr} \left( d^\mu (d^\rho d_\rho)^{n-1} d_\mu \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n M^{2n}} \text{Tr} \left( (d^\rho d_\rho)^n \right) \\ &= \text{Tr} \ln (d^\rho d_\rho + M^2), \end{aligned} \quad (3.72)$$

où toutes les égalités sont valables à des constantes infinies près. On reconnaît l'expression de l'intégrale à une boucle pour un triplet de champs scalaires ( $d_\mu$  est une matrice  $3 \times 3$  dans l'espace d'isospin) dans la dernière ligne de (3.72). Cette contribution se calcule donc suivant les méthodes usuelles dans ce domaine. Nous décrivons rapidement les étapes, car nous aurons besoin de leurs généralisations dans la suite.

L'idée est de partir de l'opérateur d'Alembertien  $\partial^2$ , qui gouverne les propriétés à courtes distances de  $d^\rho d_\rho + M^2$ . On a en effet, notant  $z = x - y$

$$e^{-is\partial^2} \delta^{(d)}(z) = \frac{i^{(1-d/2)}}{(4\pi s)^{d/2}} e^{-i\frac{z^2}{4s}}. \quad (3.73)$$

Dans (3.73), on voit apparaître explicitement la dimension d'espace-temps  $d$ . À l'aide de cette écriture, les difficultés à courtes distances  $z \rightarrow 0$  seront transférées en divergences pour l'intégration en  $s \rightarrow 0$ . Extrayant la contribution provenant du d'Alembertien, dominante à courtes distances, on écrit pour l'opérateur entier [Sch51, GL84]

$$e^{-is(d^\rho d_\rho + M^2)} \delta^{(d)}(z) = \frac{i^{(1-d/2)}}{(4\pi s)^{\frac{d}{2}}} e^{-i\frac{z^2}{4s}} \Omega(s, z), \quad (3.74)$$

où la fonction  $\Omega(s, z)$  est développée en puissances de  $s$  selon

$$\Omega(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-is)^n a_n(z). \quad (3.75)$$

Comparant la définition (3.74) à la relation (3.73), on a

$$a_0(0) = 1. \quad (3.76)$$



En réalité, les coefficients  $a_n(z)$  sont des matrices  $3 \times 3$  dans l'espace d'isospin, mais nous n'écrivons pas explicitement les indices correspondants. Injectant le développement (3.75) dans l'écriture (3.66), on voit que l'intégrale sur  $s$  est effectivement divergente en  $s = 0$ : le degré de divergence dépend de la dimension d'espace-temps. Nous utiliserons donc une forme de régularisation dimensionnelle, qui consiste à utiliser librement l'intégration par partie dans les intégrales sur  $s$  en omettant les termes de bords (voir l'annexe E.3) [Col84, BV85]. De l'expression pour le logarithme d'un opérateur (3.66), on déduit

$$\ln(d^\rho d_\rho + M^2) \delta^{(d)}(z) = -\frac{i^{(1-d/2)}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{(d/2-1)}} e^{-i\frac{z^2}{4s}} \Omega(s, z). \quad (3.77)$$

Les termes générant des pôles en  $d=4$  dans cette équation sont les suivants

$$-\frac{i}{2} \text{Tr} \ln(d^\rho d_\rho + M^2) \Big|_{\text{div}} = \frac{i^{(2-d/2)}}{2(4\pi)^{d/2}} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{(d/2+1)}} \langle a_0(0) - i s a_1(0) - s^2 a_2(0) \rangle. \quad (3.78)$$

Il nous faut donc évaluer les coefficients  $a_n(z)$  dans la limite de coïncidence  $z = 0$ . Pour cela, on remarque, dérivant l'équation définissante de  $\Omega(s, z)$ , que cette fonction vérifie une équation différentielle de type Schrödinger ou bien de la propagation de la chaleur, dans laquelle la variable  $s$  joue le rôle du temps (d'où le nom de *temps propre* pour  $s$  et *noyau de la chaleur* pour l'ensemble de la méthode)

$$i \left( \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{s} z^\mu d_\mu \right) \Omega(s, z) = (d^\rho d_\rho + M^2) \Omega(s, z). \quad (3.79)$$

Injectant le développement en puissances de  $s$  de  $\Omega(s, z)$  (3.75) dans cette équation, on obtient les relations de récurrence suivantes

$$z^\mu d_\mu a_0(z) = 0, \quad (3.80)$$

$$((n+1) + z^\mu d_\mu) a_{n+1}(z) = (d^\rho d_\rho + M^2) a_n(z) \quad \text{pour } n \geq 0. \quad (3.81)$$

Par application répétée de ces relations dans le cas  $z=0$  avec la condition limite (3.76), on trouve

$$a_1(0) = M^2, \quad (3.82)$$

$$a_2(0) = \frac{1}{12} \Gamma_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M^4. \quad (3.83)$$

Le seul terme qui ne soit pas une constante dans l'expression des divergences (3.78) est donc celui contenant  $a_2(0)$ . Par ailleurs, seule cette intégrale produit un pôle en  $d=4$  avec la régularisation employée (voir section E.3). On trouve ainsi

$$-\frac{i}{2} \text{Tr} \ln(d^\rho d_\rho + M^2) \Big|_{\text{div}} = \frac{1}{12} \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{d-4} \int dx \langle \Gamma_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu} \rangle. \quad (3.84)$$

La trace dans le membre de droite est prise dans l'espace des matrices  $3 \times 3$ . Il restera alors à exprimer ce résultat dans la notation originale en termes de matrices  $2 \times 2$ . Cependant, nous devons tout d'abord calculer la contribution aux divergences due à l'opérateur  $\mathcal{D} + \mathcal{M}$ .

### 3.3.1.2 Contribution vectorielle

On écrit le développement de  $\ln(\mathcal{D} + \mathcal{M})$  en puissances de  $\mathcal{M}$

$$\ln(\mathcal{D} + \mathcal{M}) = \ln \mathcal{D} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\mathcal{M} \mathcal{D}^{-1})^n. \quad (3.85)$$

Définissant les matrices  $\mathcal{M}_n$ , qui portent en réalité des indices de Minkowski en plus de leurs indices d'isospin, selon

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}, \quad (3.86)$$

$$\mathcal{M}_{n+1} = \mathcal{M} \mathcal{M}_n + [\mathcal{D}, \mathcal{M}_n] \quad \text{pour } n \geq 1, \quad (3.87)$$

on peut écrire

$$\ln(\mathcal{D} + \mathcal{M}) = \ln \mathcal{D} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \mathcal{M}_n \mathcal{D}^{-n}. \quad (3.88)$$

Ce développement est utile car nous avons besoin de considérer uniquement les termes jusqu'à  $n=4$  pour extraire les divergences, comme nous le verrons. Pour exploiter (3.88), il nous faut non seulement une expression pour le logarithme de l'opérateur  $\mathcal{D}$ , mais également pour ses puissances inverse, qui sont données en E.1 selon

$$\mathcal{D}(M^2)^{-n} = \frac{i^n}{(k-1)!} \int_0^{+\infty} ds s^{n-1} e^{-is\mathcal{D}(M^2)}. \quad (3.89)$$

Pour déterminer le premier terme de (3.85) et également pour tous les autres, il nous faudra utiliser la généralisation de la fonction  $\Omega(s, z)$  en une matrice  $\Omega_\nu^\mu(s, z)$  portant des indices de Minkowski

$$\left( e^{-is\mathcal{D}(M^2)} \right)_\nu^\mu \delta^{(d)}(z) = \frac{i^{(1-d/2)}}{(4\pi s)^{\frac{d}{2}}} e^{-i\frac{z^2}{4s}} \Omega_\nu^\mu(s, z). \quad (3.90)$$

Dans ce cas également, les coefficients du développement

$$\Omega_\nu^\mu(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-is)^n a_{n\nu}^\mu(z), \quad (3.91)$$

vont être déterminés en utilisant les relations de récurrence, qui sont ici

$$z^\mu d_\mu a_{0\nu}^\mu(z) = 0, \quad (3.92)$$

$$((n+1) + z^\mu d_\mu) a_{n+1\nu}^\mu(z) = \mathcal{D}_\sigma^\mu(M^2) a_{n\nu}^\sigma(z) \quad \text{pour } n \geq 0. \quad (3.93)$$

La condition pour le premier coefficient étant cette fois

$$a_{0\nu}^\mu(0) = \eta_\nu^\mu. \quad (3.94)$$

En réalité, on aura également besoin de connaître la valeur de certaines expressions impliquant des dérivées  $d_\mu$  agissant sur ces coefficients, toujours dans la limite de coïncidence. Les expressions nécessaires sont données à l'annexe E.2. On trouve les contributions suivantes: pour  $i/2 \operatorname{Tr} \ln \mathcal{D}$ , l'expression est identique au membre de droite de (3.78), excepté que les coefficients apparaissant portent des indices de Minkowski  $a_{n\mu}^\mu(0)$ , et que le signe global est opposé. D'après les valeurs données en E.2, on trouve

$$\frac{i}{2} \operatorname{Tr} \ln \mathcal{D} \Big|_{\text{div}} = \frac{5}{3} \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{d-4} \int dx \langle \Gamma_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu} \rangle. \quad (3.95)$$

En réalité le facteur  $5/3$  provient d'une contribution  $d/12$  du premier terme dans (E.20), qui est l'analogue du premier terme dans l'expression (3.83) de  $a_2(0)$ , mais avec une somme sur les indices de Minkowski, et d'une contribution  $-2$  du dernier terme de la même équation, qui provient purement de la structure non-abélienne.

Comme les calculs sont assez fastidieux, nous reléguons une description de la contribution des termes  $\mathcal{M}_n \mathcal{D}^{-n}$  pour  $n \leq 4$  à l'annexe E.4.

### 3.3.1.3 Divergences à une boucle

Le résultat final est que le pôle en  $d=4$  de la contribution à une boucle à la fonctionnelle génératrice est donné par

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \operatorname{Tr} \ln \mathcal{F} \Big|_{\text{div}} &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{d-4} \int dx \\ &\times \left\{ \frac{7}{4} \langle \Gamma_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu} \rangle - \frac{7}{12M^2} \langle [d_\rho, \Gamma^{\rho\mu}] [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\mu}] \rangle \right. \\ &- \frac{1}{24M^4} \langle [d_\mu, [d_\rho, \Gamma^{\rho\nu}]] [d^\mu, [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\nu}]] \rangle - \frac{1}{6M^4} \langle [d_\rho, \Gamma^{\rho\mu}] [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\nu}] \Gamma_{\mu\nu} \rangle \\ &- \frac{1}{24M^6} \langle [d_\rho, \Gamma^{\rho\mu}] [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\nu}] [d_\mu, [d^\tau, \Gamma_{\tau\nu}]] \rangle \\ &- \frac{1}{96M^8} \langle [d_\rho, \Gamma^{\rho\mu}] [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\nu}] \rangle \langle [d^\tau, \Gamma_{\tau\mu}] [d^\lambda, \Gamma_{\lambda\nu}] \rangle \\ &\left. - \frac{1}{192M^8} \langle [d_\rho, \Gamma^{\rho\mu}] [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\mu}] \rangle \langle [d^\tau, \Gamma_{\tau\nu}] [d^\lambda, \Gamma^{\lambda\nu}] \rangle \right\}. \quad (3.96) \end{aligned}$$

Une remarque est nécessaire concernant cette expression: l'apparition de puissances inverses de  $M$  est directement liée au terme  $p_\mu p_\nu / M^2$  du propagateur pour le champ vectoriel massif. Chaque puissance de  $M$  contenant une puissance de  $g$ , il semblerait donc que l'expression soit singulière dans la limite  $g \rightarrow 0$ . Ceci étant dit, chaque courbure  $\Gamma_{\mu\nu}$  contient les sources  $L_\mu$ , mais également les champs classiques  $\bar{W}_\mu$  accompagnés d'une puissance de  $g$ . Il faut donc utiliser les équations de mouvement (3.46) pour mettre le résultat (3.96) sous la forme des termes indépendants du lagrangien effectif  $\mathcal{L}'_{\text{eff}}$ . Pour arriver à cela, il faut également revenir à l'écriture en termes de matrices  $2 \times 2$ . Lorsque ceci est fait, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{F} \Big|_{\text{div}} &= \frac{1}{16 \pi^2} \frac{1}{d-4} \int dx \left\{ \frac{43}{3} g^2 \mathcal{O}_1^{(2)} + \frac{17}{6} g^2 \mathcal{O}_2^{(2)} \right. \\ &\quad + \frac{1}{12} g \mathcal{O}_1^{(3)} \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \mathcal{O}_1^{(4)} - \frac{5}{6} \mathcal{O}_3^{(4)} - \frac{1}{12} \mathcal{O}_5^{(4)} - \frac{1}{6} \mathcal{O}_6^{(4)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

On vérifie donc explicitement que toutes les divergences prennent la forme de termes présents dans le lagrangien. Employant la même définition que précédemment pour  $\lambda$

$$\lambda = \frac{\mu^{d-4}}{16 \pi^2} \left( \frac{1}{d-4} - \frac{1}{2} (\ln 4 \pi - \gamma + 1) \right), \quad (3.98)$$

on définit les constantes nues en fonction des constantes renormalisées selon

$$a_{n,2} = a_{n,2}^r(\mu) + \alpha_n \lambda, \quad (3.99)$$

$$b_{n,1} = b_{n,1}^r(\mu) + \beta_n \lambda, \quad (3.100)$$

$$c_{n,0} = c_{n,0}^r(\mu) + \gamma_n \lambda, \quad (3.101)$$

avec

$$\alpha_1 = -\frac{43}{3}, \quad (3.102)$$

$$\alpha_2 = -\frac{17}{6}, \quad (3.103)$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{12}, \quad (3.104)$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{12}, \quad (3.105)$$

$$\gamma_3 = \frac{5}{6}, \quad (3.106)$$

$$\gamma_5 = \frac{1}{12}, \quad (3.107)$$

$$\gamma_6 = \frac{1}{6}, \quad (3.108)$$

$\beta_2$  ainsi que tous les autres coefficients  $\gamma_n$  étant nuls. Alors, on définit le lagrangien effectif renormalisé  $\mathcal{L}_{\text{eff}}^r$  comme le lagrangien effectif, mais avec les constantes renormalisées apparaissant dans le membre de droite de (3.99-3.101), au lieu des constantes nues du membre de gauche. Dénnotant par  $i/2 \text{Tr} \ln \mathcal{F}|_{\text{finie}}(\mu)$  la partie finie des diagrammes évalués en régularisation dimensionnelle avec l'échelle  $\mu$ , on aura

$$\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{F} + \int dx \mathcal{L}_{\text{eff}} = + \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{F} \Big|_{\text{finie}}(\mu) + \int dx \mathcal{L}_{\text{eff}}^r(\mu). \quad (3.109)$$

Nous vérifions explicitement à la section 3.3.2 que les fonctions à deux points sont effectivement finies avec ces renormalisations.

### 3.3.2 Fonction à deux points des courants de Noether

On effectue le calcul du terme quadratique en sources dans la fonctionnelle génératrice  $\Gamma[L_\mu^a]$ , en régularisation dimensionnelle. A nouveau, nous utilisons comme variable les champs invariants sous la symétrie  $SU(2)_R$ : les champs  $W_\mu^a$ . Les techniques de calcul pour les diagrammes à une boucle étant connues, nous donnons uniquement les résultats et commentons quelques points spécifiques aux LEETs. A titre de vérification, ces calculs ont également été effectués sur ordinateur, en les programmant en langage FORM [Ver00].

Les calculs sont effectués à l'ordre  $\mathcal{O}(p^4)$ , c'est à dire en tenant compte des contributions à une boucle avec les termes du lagrangien  $\mathcal{O}(p^2)$  et en arbres pour les termes de  $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$  et  $\mathcal{L}_4$ . Avec les renormalisations données en (3.102-3.105), le résultat est fini, est indépendant de l'échelle  $\mu$ . On peut écrire la fonction à deux points des courants  $J_L^{a\mu}$  sous la forme

$$\begin{aligned} i \int dx e^{ip \cdot x} \langle 0 | T J_L^{a\mu}(x) J_L^{b\nu}(0) | 0 \rangle &= (\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \\ &\times \left\{ Z \frac{M_W^2}{g^2} \frac{1}{p^2 - M_W^2} + f(p^2) \right\} + \mathcal{O}(p^3), \end{aligned} \quad (3.110)$$

où  $f$  est une fonction d'ordre  $\mathcal{O}(p^0)$ . Afin d'expliciter cette écriture, quelques définitions sont en ordre: nous utilisons les conventions de [GL84]. Les définitions sont les suivantes. La fonction à deux points  $J(p^2)$  est donnée par

$$i J(p^2) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - M^2} \frac{1}{(k - p)^2 - M^2}. \quad (3.111)$$

La fonction à deux points renormalisée est définie par

$$\bar{J}(p^2) = J(p^2) - J(0). \quad (3.112)$$

Egalement, de façon à faire apparaître explicitement les pôles, nous définissons

$$\tilde{J}(m^2, p^2) = \frac{J(p^2) - J(m^2) - (p^2 - m^2) J'(m^2)}{(p^2 - m^2)^2}, \quad (3.113)$$

où  $J'$  est la dérivée de la fonction  $J$ . Les fonctions  $\tilde{J}$  ne présentent donc pas de pôles.

Avec ces notations, la masse physique  $M_W$  est définie par

$$\begin{aligned} \frac{M_W^2}{M^2} &= 1 + g(-a_{1,1} + a_{2,1}) \\ &+ g^2 \left( a_{1,1}^2 - a_{1,1} a_{2,1} - a_{1,2}^r(\mu) + a_{2,2}^r(\mu) + \frac{1}{2} c_{2,0} \right) \\ &+ g^2 \left( -\frac{23}{64\pi^2} \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) - \frac{61}{192\pi^2} + \frac{33}{4} \bar{J}(M^2) \right). \end{aligned} \quad (3.114)$$

Le facteur  $Z$  est donné par

$$\begin{aligned} Z &= 1 + g(a_{1,1} - 2b_{1,0}) \\ &+ g^2 \left( b_{1,0}^2 + a_{1,2}^r(\mu) - 2b_{1,1}^r(\mu) + \frac{85}{192\pi^2} \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) \right) \\ &+ g^2 \left( \frac{253}{576\pi^2} - \frac{55}{4} \bar{J}(M^2) + \frac{33}{4} M^2 J'(M^2) \right). \end{aligned} \quad (3.115)$$

La fonction  $f$  ne contient pas de pôle, et est donnée par

$$\begin{aligned} f(p^2) &= b_{1,0}^2 + \frac{1}{2} c_{1,0}^r(\mu) + \frac{1}{192\pi^2} \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) + \frac{25}{576\pi^2} - \frac{11}{2} M^2 J'(M^2) \\ &- \frac{1}{12} \bar{J}(p^2) + M^2 \left( p^2 \left( 4\tilde{J}(0, p^2) - \frac{11}{2} \tilde{J}(M^2, p^2) \right) + \frac{55}{4} M^2 \tilde{J}(M^2, p^2) \right). \end{aligned} \quad (3.116)$$

Ces expressions sont finies (et indépendantes d'échelles): les termes proportionnels à  $\lambda$  (2.88) dus aux intégrales de boucles, et les facteurs de  $\lambda$  entrant dans les définitions (3.99-3.101) se compensent.

Notons que cette renormalisation procède différemment du cas des théories renormalisables usuelles: la constante  $g$  n'est pas renormalisée, mais les constantes  $a_n, b_n, c_n$  le sont. De plus, avec l'écriture adoptée, la masse  $M^2$  n'est pas directement renormalisée: le rapport  $M_W/M$  est fini. En revanche, c'est la constante de basse énergie  $a_2$  apparaissant devant le terme de masse qui est renormalisée. On peut vérifier dans les expressions (3.114-3.115) que la fonction à deux points est indépendante de l'échelle  $\mu$ . Ceci montre explicitement que l'on peut exprimer des quantités physiques, telles que la masse  $M_W$  en fonction des paramètres du lagrangien. La masse s'écrit comme un développement en puissances de  $g$ . Nous obtenons que les premières corrections à la masse carrée sont d'ordre  $g^3$ : ces corrections peuvent sembler importantes *a priori*, mais on ne s'attend pas à ce que les constantes  $a_{1,1}$  et  $a_{2,1}$  soient d'ordre unité, mais plutôt d'ordre  $f/\Lambda$ , d'après la discussion précédant (2.96).

Nous avons ici travaillé en régularisation dimensionnelle, évitant la question des divergences en puissances. Pour une discussion auxiliaire liée à l'annulation des divergences quartiques due à la structure de jauge, voir section D.3.

## 3.4 Résumé

Dans ce chapitre, nous avons considéré la théorie effective à basse énergie décrivant les interactions des trois GBs résultant de la brisure de symétrie  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  avec une théorie de Yang-Mills  $SU(2)$ . Les GBs décrivent la dynamique à basse énergie d'une théorie présentant cette brisure, du moment que les autres modes produits seront plus massifs. La différence entre les modèles interviendra au niveau de la valeur des constantes de basse énergie apparaissant devant les opérateurs du lagrangien effectif.

Le couplage des champs de jauge aux courants conservés du secteur produisant les GBs est introduit directement, en identifiant le groupe de transformation  $SU(2)_R$  au groupe de Yang-Mills  $SU(2)$ . On construit alors le lagrangien effectif, qui contient tous les termes invariants sous les symétries du problème. Ces termes sont ordonnés sous forme d'un développement à basse énergie, selon les règles de comptages décrites au chapitre 2, permettant en principe un développement en boucles.

Un des objectifs de ce chapitre était de démontrer explicitement le fonctionnement de la procédure de renormalisation à une boucle dans le cas d'une théorie de Yang-Mills subissant le mécanisme de Higgs, et de présenter une première application. Pour ce faire, nous avons choisi de travailler avec des variables invariantes de jauge (sous la symétrie dynamique  $SU(2)_R$ ). Ceci entraîne que seuls les champs physiques apparaissent encore dans le lagrangien, d'où l'utilisation abusive de l'expression « jauge unitaire ». La procédure de renormalisation à une boucle est effectuée avec ces variables: on utilise les méthodes du noyau de la chaleur pour obtenir toutes les divergences à une boucle dans une expression fermée. Ceci démontre que le calcul de la fonctionnelle génératrice à une boucle dans la jauge unitaire génère un nombre fini de divergences. De plus, ces dernières peuvent effectivement être absorbées dans les constantes du lagrangien  $\mathcal{O}(p^4)$ , comme prévu par le comptage de puissance. Nous donnons des détails sur la méthode du noyau de la chaleur, adaptée à notre cas d'un champ de Yang-Mills non-abélien et massif à l'annexe E.

Nous avons ainsi étudié le couplage de champs de jauge  $SU(2)$  à un triplet de GBs résultant de la brisure  $SU(2) \times SU(2) \rightarrow SU(2)$ , utilisant le comptage de puissance introduit au chapitre 2. Nous avons également explicitement vérifié la cohérence du développement à une boucle. Il ne semble donc pas y avoir de difficultés quant à la cohérence théorique d'une LEET pour la brisure d'une théorie de Yang-Mills  $SU(2) \times U(1)$  vers  $U(1)$  sans Higgs physique, y compris concernant le calcul en jauge unitaire. Nous verrons cependant à la section 5.1 que, dans une telle application, on rencontrerait d'autres difficultés, d'ordre phénoménologique: le couplage direct des GBs aux champs de Yang-Mills, ainsi qu'aux fermions qui leur sont couplés permettrait des termes à l'ordre  $\mathcal{O}(p^2)$  qui ne sont pas observés expérimentalement à ce niveau de précision (ils correspondent à des opérateurs *irrelevant*s dans le cas du SM, voir section 1.6.2).

Ceci nous incite à trouver un autre moyen pour introduire le couplage entre les GBs et les champs de jauge. Comme première application de cette idée, nous nous intéressons aux modèles *moose*, décrits à l'annexe F. Nous en introduisons un formalisme utilisant des spurions pour introduire les couplages au chapitre 4. La solution que nous proposons sera ensuite appliquée au cas de l'EWSB au chapitre 5.



## Chapitre 4

# Bosons de Goldstone, résonances vectorielles et règles de somme de Weinberg

Dans ce chapitre, nous poursuivons notre investigation de l'interaction entre champs de jauge et GBs: nous reconsidérons l'introduction des couplages entre les uns et les autres, procédant différemment des sections 2.4.2.1 et 3.1.1. Nous aurons recours à une plus grande symétrie sous laquelle les transformations des GBs et celles des champs de Yang-Mills sont indépendantes. Nous introduisons en effet des champs se transformant à la fois sous les symétries de jauge et sous les transformations chirales agissant sur les GBs. En revanche, l'intégrale fonctionnelle ne porte pas sur ces champs: ce sont des spurions. On requiert également que les spurions satisfassent à la contrainte de covariance constante: ceci permet de décrire la réduction de symétrie correspondant à l'introduction du couplage des GBs aux champs de jauge. La contrainte de constance covariante réduit l'espace des configurations admises pour les connexions. De plus, après résolution des contraintes, on constate que les spurions se réduisent à des constantes: celles-ci serviront de paramètres de développement.

Appliqué aux modèles *mooses*, qui consistent en un enchaînement de théories de jauge et de modèles sigma non-linéaires interagissant les uns avec les autres (voir l'annexe F), le développement en puissance des spurions permet une classification des opérateurs du lagrangien effectif, distinguant entre les termes d'un même ordre du développement en puissances des impulsions. La règle générale est la suivante: les interactions entre objets distants le long de la chaîne que constitue le *moose* sont reléguées aux ordres supérieurs dans ce développement. À l'ordre le plus bas dans le développement chirale et dans le développement en puissances des spurions, on obtient ainsi le même lagrangien que celui postulé dans l'hypothèse de *déconstruction dimensionnelle* (voir l'annexe F.3): il ne contient pas de termes « non-locaux » dans la cinquième dimension définie par la chaîne du *moose*.

L'interprétation des conséquences physiques de l'absence de tels termes nécessite un nouveau détour par le domaine de la QCD à basse énergie. On remarque en effet que l'extension de la  $\chi$ PT vers les plus hautes énergies, incluant explicitement les résonances vectorielles les plus légères dans le lagrangien effectif contenant tous les termes permis par la symétrie chirale [Mei88, EGL<sup>+</sup>89], ne reproduit pas automatiquement les deux règles de somme de Weinberg (*Weinberg sum rules* ou WSRs) [Wei67b]<sup>1</sup> déduites de la QCD. Notons que ces WSRs ne sont pas uniquement liées à la symétrie chirale, mais également aux propriétés à courtes distances de la QCD (voir annexe G.1). On doit donc imposer à la théorie effective de reproduire les WSRs, ce qui nécessite d'interdire certaines interactions.

Le *moose* linéaire ouvert fournit une extension particulière de la  $\chi$ PT, incluant des résonances vectorielles comme degrés de liberté dynamiques dans la LEET: comme déjà discuté à la section 2.4.2.1 abordant les extensions de la  $\chi$ PT, les champs vectoriels (massifs) doivent alors être introduits comme champs de jauge afin que leurs masses soient protégées. Si les interactions correspondant à des termes non-locaux le long du *moose* sont éliminées, on obtient à l'approximation des arbres [SS03] les deux WSRs, correspondant à un comportement plus doux à haute énergie que celui naïvement attendu.

---

1. Au sujet des WSRs en  $\chi$ PT et ses extensions, on pourra consulter l'annexe G.



Dans ce chapitre, nous proposons une approche basée sur les symétries, en relation avec l'idée de naturalité [tH79a], et non sur une référence aux théories à cinq dimensions et à la localité dans la dimension supplémentaire. Le cadre des *mooses* et du développement en puissances de spurions permet ainsi de rejeter aux ordres supérieurs les interactions engendrant des corrections aux WSRs. De plus, nous montrerons à la section 4.2.1 qu'un *moose* à  $K$  sites donne à l'ordre dominant du développement approprié,  $K$  règles de somme généralisant ces deux WSRs <sup>2</sup>. Nous discutons leur lien avec le schéma de brisure de la symétrie chirale.

## 4.1 Spurions et *mooses*

Dans cette section, nous présentons le développement simultané en puissances des impulsions et des spurions, appliqué aux *mooses* linéaires ouverts. Partant du cas où les GBs et les champs de jauge n'interagissent pas, on introduit leurs couplages *via* la contrainte de covariance constante appliquée aux spurions. En l'absence des spurions, les GBs et les champs de jauge n'interagissent plus, le groupe de symétrie du lagrangien est alors plus grand. Par conséquent, un développement autour de ce point est possible, les corrections radiatives aux petits paramètres étant elle-mêmes faibles. Les paramètres de la théorie sous-jacente n'auront donc pas à être ajustés finement pour obtenir de telles valeurs des paramètres de la théorie effective.

Afin de distinguer la situation dans laquelle le *moose* est disjoint de celle où les constantes de couplage de jauge sont nulles, on est contraint d'introduire des nouveaux paramètres de développement. Ceux-ci vont provenir des spurions, lesquels rendent le lagrangien effectif invariant sous une symétrie plus grande sous laquelle les transformations des GBs et celles des champs de jauge sont indépendantes. Ceci nous donne la loi de transformation des spurions. La contrainte de constance covariante appliquée aux spurions implique une relation entre les transformations de jauge et celles des GBs. De plus, chaque spurion se réduit alors à une constante, qui sert de paramètre de développement.

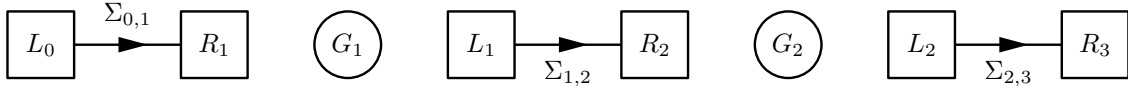
Notons que les spurions ont été employés à maintes reprises par le passé: pour introduire en  $\chi$ PT la brisure explicite de symétrie due aux masses des quarks [Wei79c, GL84], pour introduire le couplage électromagnétique des quarks dans cette même  $\chi$ PT [EGPdR89, Ure95] et pour l'étude des masses radiatives des PGBs [Mou97]. Dans toutes ces applications aux LEETs, les spurions sont utilisés comme paramètres de développement. D'autre part, des spurions ont également été utilisés dans le seul but de compter formellement les occurrences des constantes de couplages dans les *mooses* fermés [AHCG01b]. Le but était de déterminer l'ordre auquel les corrections radiatives aux masses des PGBs apparaissent, supposant que l'on s'est débarrassé des termes indésirables (les termes non-locaux). Ces spurions sont ensuite posés égaux à un, et ne peuvent donc pas servir de paramètres de développement. Les spurions que nous utilisons ici sont apparentés au premier cas: ils seront utilisés comme paramètres de développement. L'emploi de la contrainte de constance covariante est en revanche nouveau dans ce cadre, et nous détaillons donc les étapes correspondantes.

### 4.1.1 GBs et champs de jauge

Nous considérons  $K + 1$  triplets de GBs, décrivant chacun la brisure spontanée  $SU(2) \times SU(2) \longrightarrow SU(2)$ . Indépendamment de ces GBS, nous incluons  $K$  théories de Yang-Mills  $SU(2)$ . Nous décrivons le cas général, laissant  $K$  libre. En revanche, les schémas résumant les propriétés de transformations des champs, comme par exemple la figure 4.1, représentent le cas  $K = 2$ .

---

2. Depuis que nous avons publié ce travail dans [HS04b], d'autres auteurs ont également retrouvé ce résultat concernant les règles de somme de Weinberg [CKT04]. Par ailleurs, nous nous intéressons particulièrement à la formulation du développement en termes de spurions, qui n'apparaît pas dans [CKT04].



**Figure 4.1.** Trois triplets de GBs et deux théories de Yang-Mills.

Les trois modèles sigma non-linéaires sont représentés par des flèches joignant des carrés: ceci représente par exemple le fait que la matrices  $\Sigma_{0,1} \in \text{SU}(2)$  décrivant un triplet de GBs se transforme selon

$$\Sigma_{0,1} \mapsto L_0 \Sigma_{0,1} R_1^\dagger, \quad (4.1)$$

avec  $(L_0, R_1) \in \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ . Les groupes de jauge sont représentés par des cercles: le cercle étiqueté par  $G_1$  signifie que le champ de jauge hermitien  $G_{1\mu}$  se transforme selon

$$G_{1\mu} \mapsto G_1 G_{1\mu} G_1^\dagger + \frac{i}{g_1} G_1 \partial_\mu G_1^\dagger, \quad (4.2)$$

avec  $G_1 \in \text{SU}(2)$ . Notons que le placement des différents éléments de la figure n'a pas d'importance à ce stade.

L'ensemble des cinq théories indépendantes que nous venons de décrire est invariant, pour  $K$  générique, sous le groupe

$$S_{\text{naturel}, K} = \prod_{l=1}^K \text{SU}(2)_{G_l} \times \prod_{k=0}^K \text{SU}(2)_{L_k} \times \text{SU}(2)_{R_{K+1}}, \quad (4.3)$$

sous lequel les champs se transforment selon

$$\Sigma_{k,k+1} \mapsto L_k \Sigma_{k,k+1} R_{k+1}^\dagger, \quad \text{pour } k=0, \dots, K, \quad (4.4)$$

$$G_{k\mu} \mapsto G_k G_{k\mu} G_k^\dagger + \frac{i}{g_k} G_k \partial_\mu G_k^\dagger, \quad \text{pour } k=1, \dots, K. \quad (4.5)$$

Reprenant la méthode présentée à la section 2.2 pour construire la fonctionnelle génératrice des courants de symétrie, on considère une version locale des transformations  $L_k, R_k$  en introduisant les sources correspondantes. Le lagrangien effectif doit alors être invariant lorsque, simultanément aux transformations des GBs (4.4), on transforme les sources  $L_{k\mu}, R_{k\mu}$  selon

$$L_{k\mu} \mapsto L_k L_{k\mu} L_k^\dagger + i L_k \partial_\mu L_k^\dagger, \quad (4.6)$$

$$R_{k\mu} \mapsto R_k R_{k\mu} R_k^\dagger + i R_k \partial_\mu R_k^\dagger. \quad (4.7)$$

On introduit donc les dérivées covariantes suivantes

$$D_\mu \Sigma_{k,k+1} = \partial_\mu \Sigma_{k,k+1} - i L_{k\mu} \Sigma_{k,k+1} + i \Sigma_{k,k+1} R_{k+1\mu}, \quad \text{pour } k=0, \dots, K. \quad (4.8)$$

Le lagrangien effectif contiendra tous les termes invariants sous le groupe de symétrie  $S_{\text{naturel}, K}$  (4.3). D'après l'étude du chapitre 2, le comptage de puissance approprié pour le développement à basse énergie est le suivant (les  $f_k$  sont les constantes de désintégration des GBs)

$$f_k = \mathcal{O}(p^0), \quad (4.9)$$

$$\Sigma_{k,k+1} = \mathcal{O}(p^0), \quad (4.10)$$

$$g_k = \mathcal{O}(p^1), \quad (4.11)$$

$$G_{k\mu} = \mathcal{O}(p^0), \quad (4.12)$$

$$L_{k\mu}, R_{k\mu} = \mathcal{O}(p^1). \quad (4.13)$$

Le lagrangien  $\mathcal{O}(p^2)$  le plus général invariant sous  $S_{\text{naturel}, K}$  est

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^K f_k^2 \langle D_\mu \Sigma_{k,k+1} D^\mu \Sigma_{k,k+1}^\dagger \rangle - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \langle G_{k\mu\nu} G_k^{\mu\nu} \rangle, \quad (4.14)$$



Pour résoudre les contraintes (4.22-4.23), nous choisirons une jauge, que nous appellerons *jauge standard*, dans laquelle les spurions peuvent être écrits comme des matrices constantes proportionnelles à l'unité (la notation  $\stackrel{j. s.}{=}$  signifie que l'égalité est écrite dans cette jauge particulière, en injectant la solution des contraintes)

$$X_k \stackrel{j. s.}{=} \xi_k \mathbb{1}_{2 \times 2}, \quad (4.26)$$

$$Y_k \stackrel{j. s.}{=} \eta_k \mathbb{1}_{2 \times 2}. \quad (4.27)$$

Les constantes  $\xi_k, \eta_k$  seront alors des paramètres de développement, d'après (4.19)

$$\xi_k, \eta_k = \mathcal{O}(\epsilon), \quad \text{pour } k = 1, \dots, K. \quad (4.28)$$

D'autre part, dans la jauge, où (4.26-4.27) sont valables, on trouvera que les sources et les champs de jauge sont identifiés

$$R_{k\mu}^a \stackrel{j. s.}{=} g_k G_{k\mu}^a, \quad \text{pour } a = 1, 2, 3, \quad (4.29)$$

$$L_{k\mu}^a \stackrel{j. s.}{=} g_k G_{k\mu}^a, \quad \text{pour } a = 1, 2, 3, \quad (4.30)$$

ce qui est bien le résultat désiré, résumé par le tableau 4.1.

$$\begin{array}{c} \underbrace{\text{SU}(2)_{R_k} \times \text{SU}(2)_{G_k} \times \text{SU}(2)_{L_k}} \\ \downarrow \\ X_k, Y_k \\ \downarrow \\ \text{SU}(2)_{R_k + G_k + L_k} \end{array}$$

**Tableau 4.1.** réduction de symétrie due aux spurions  $X_k$  et  $Y_k$ .

La différence avec les sections 2.4.2.1, 3.1.1 et 5.1, ainsi que l'annexe F, est que les autres interactions des champs de jauge avec les GBs seront supprimées par des puissances des spurions.

### Démonstration

On remarque tout d'abord que les conditions de réalité (4.16-4.17) équivalent à la possibilité d'écrire

$$X_k = \xi_k U_k, \quad \text{pour } k = 1, \dots, K, \quad (4.31)$$

$$Y_k = \eta_k V_k, \quad \text{pour } k = 1, \dots, K, \quad (4.32)$$

où  $\xi_k, \eta_k$  sont des fonctions réelles, et  $U_k$  et  $V_k$  appartiennent à  $\text{SU}(2)$ . Les fonctions  $\xi_k$  et  $\eta_k$  sont invariantes sous les transformations. Comme les contraintes impliquent, indépendamment de la jauge

$$D_\mu (X_k X_k^\dagger) = \partial_\mu (X_k X_k^\dagger) = 0, \quad (4.33)$$

on peut montrer que

$$\partial_\mu \xi_k = 0, \quad (4.34)$$

et de même pour  $Y_k$

$$\partial_\mu \eta_k = 0. \quad (4.35)$$

Nous démontrons à présent les affirmations (4.26-4.30). A cet effet, nous utilisons une transformation  $\text{SU}(2)_{R_k}$  avec le paramètre suivant

$$R_k = U_k^\dagger. \quad (4.36)$$

Identifiant alors les composantes dans la contrainte (4.22), on obtient l'écriture (4.26), ainsi que le résultat annoncé en (4.29), qui correspond à la réduction de symétrie décrite au tableau 4.2.

$$\begin{array}{c}
\overbrace{\mathrm{SU}(2)_{R_k} \times \mathrm{SU}(2)_{G_k}} \\
\downarrow X_k \\
\mathrm{SU}(2)_{R_k+G_k}
\end{array}$$

**Tableau 4.2.** Réduction de symétrie due au spurion  $X_k$ .

On procède de la même manière pour  $Y_k$ , appliquant la transformation  $\mathrm{SU}(2)_{L_k}$  suivante

$$L_k = V_k. \quad (4.37)$$

Ceci permet de mettre  $Y_k$  sous la forme (4.27). On obtient également l'identification (4.30), qui correspond à la réduction de symétrie décrite au tableau 4.3.

$$\begin{array}{c}
\overbrace{\mathrm{SU}(2)_{G_k} \times \mathrm{SU}(2)_{L_k}} \\
\downarrow Y_k \\
\mathrm{SU}(2)_{G_k+L_k}
\end{array}$$

**Tableau 4.3.** Réduction de symétrie due au spurion  $Y_k$ .

Nous avons ainsi obtenu la solution des contraintes dans une jauge où les spurions s'écrivent (4.26-4.27) avec  $\xi_k, \eta_k$  constantes. Cette jauge est atteinte en appliquant les transformations (4.36) et (4.37). Dans cette jauge, on trouve que les connexion et les champs de jauge sont identifiés selon (4.29-4.30). Notons que l'on n'a pas eu à appliquer de transformation  $\mathrm{SU}(2)_{G_k}$ . Ainsi le champ de jauge  $G_{k\mu}$  est libre de toute contrainte. Du groupe de symétrie original  $S_{\text{naturel}, K}$ , les spurions sélectionnent le sous-groupe  $S_{\text{réduit}, K}$  suivant

$$S_{\text{réduit}, K} = \mathrm{SU}(2)_{L_0} \times \mathrm{SU}(2)_{R_{K+1}} \times \prod_{k=1}^K \mathrm{SU}(2)_{G_k+L_k+R_k}, \quad (4.38)$$

puisque la solution explicite des contraintes dans la jauge standard n'est invariante que sous ces transformations. Seul le sous-groupe suivant

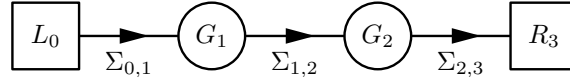
$$S_{\text{dynamique}, K} = \prod_{k=1}^K \mathrm{SU}(2)_{G_k}, \quad (4.39)$$

correspond à des champs de Yang-Mills dynamiques: c'est le sous-groupe « jaugé ». A ce stade, nous n'avons pas introduit de spurions se transformant sous  $L_0$  ou  $R_{K+1}$ :  $L_{0\mu}$  et  $R_{K+1\mu}$  sont des sources des courants de Noether de la symétrie globale  $\mathrm{SU}(2)_{L_0} \times \mathrm{SU}(2)_{R_{K+1}}$ . Nous verrons à la section 4.1.3 que les  $K$  champs de jauge correspondant au groupe  $\prod_{k=1}^K \mathrm{SU}(2)_{G_k+L_k+R_k}$  acquièrent des masses, ce qui élimine du spectre  $K$  multiplets de GBs *via* le mécanisme de Higgs. La symétrie globale  $\mathrm{SU}(2)_{L_0} \times \mathrm{SU}(2)_{R_{K+1}}$  correspond à la symétrie chirale agissant sur le multiplet de GBs restant dans le spectre, qui est donné en jauge standard par le produit des matrices  $\Sigma_{k,k+1}$  le long de la chaîne.

#### 4.1.2.2 Lagrangien $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0)$

Le fait d'imposer les contraintes entraîne l'identification des transformations  $L_k$  et  $R_k$  aux transformations de jauge  $G_k$ . En revanche, les sources correspondantes  $L_{0\mu}$  et  $R_{K+1\mu}$  restent des fonctions classiques dont la fonctionnelle génératrice dépendra explicitement, et qui permettront d'obtenir les fonctions de Green des courants de Noether de la symétrie globale  $\mathrm{SU}(2)_{L_0} \times \mathrm{SU}(2)_{R_{K+1}}$  par application de dérivées fonctionnelles.

Ceci peut être représenté diagrammatiquement par le passage de la figure 4.2 à la figure 4.3, correspondant à la notation usuelle pour les *mooses* (voir figure F.1 dans l'annexe F). Cette représentation perd cependant l'information des spurions, lesquels vont jouer un rôle essentiel par la suite.



**Figure 4.3.** Le diagramme « réduit » correspondant au modèle de la figure 4.2.

Nous introduisons également une nouvelle notation pour les dérivées covariantes lorsque l'on injecte la solution (4.26-4.30) des contraintes (4.22-4.23) exprimées dans la jauge standard. On écrira alors, pour  $k = 1, \dots, K - 1$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \Sigma_{k,k+1} &\equiv D_\mu \Sigma_{k,k+1} \Big|_{\text{j. s.}} \\ &= \partial_\mu \Sigma_{k,k+1} - i g_k G_{k\mu} \Sigma_{k,k+1} + i g_{k+1} \Sigma_{k,k+1} G_{k+1\mu}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

et pour les extrémités du *moose*

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \Sigma_{0,1} &\equiv D_\mu \Sigma_{0,1} \Big|_{\text{j. s.}} \\ &= \partial_\mu \Sigma_{0,1} - i L_{0\mu} \Sigma_{0,1} + i g_1 \Sigma_{0,1} G_{1\mu}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \Sigma_{K,K+1} &\equiv D_\mu \Sigma_{K,K+1} \Big|_{\text{j. s.}} \\ &= \partial_\mu \Sigma_{K,K+1} - i g_K G_{K\mu} \Sigma_{K,K+1} + i \Sigma_{K,K+1} R_{K+1\mu}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Nous pouvons à présent écrire le lagrangien à l'ordre dominant dans le développement en impulsions et en spurions, c'est-à-dire à l'ordre  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0)$ . En réalité, tous les termes de cet ordre ont déjà été écrits dans l'expression de  $\mathcal{L}_2$  (4.14): les spurions n'y apparaissent pas explicitement. La différence est que l'on considère maintenant que les contraintes (4.22-4.23) s'appliquent

$$\mathcal{L}^{(2,0)} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^K f_k^2 \left\langle D_\mu \Sigma_{k,k+1} D^\mu \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \langle G_{k\mu\nu} G_k^{\mu\nu} \rangle. \quad (4.43)$$

La conséquence des contraintes appliquées sur les spurions est plus aisément visualisée dans la jauge standard. Dans cette jauge, on voit que le lagrangien (4.43), bien qu'il soit formellement identique à  $\mathcal{L}_2$  (4.14), contient des interactions entre GBs et champs de jauge. En effet, on a

$$\mathcal{L}^{(2,0)} \Big|_{\text{j. s.}} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^K f_k^2 \left\langle \nabla_\mu \Sigma_{k,k+1} \nabla^\mu \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \langle G_{k\mu\nu} G_k^{\mu\nu} \rangle. \quad (4.44)$$

Dans cette expression, les dérivées  $\nabla_\mu$  impliquent les champs dynamiques  $G_{k\mu}$ . Les dérivées  $\nabla_\mu \Sigma_{0,1}$  et  $\nabla_\mu \Sigma_{K,K+1}$  impliquent également les sources  $L_{0\mu}$  et  $R_{K+1\mu}$  qui permettent d'extraire les courants de Noether de la symétrie  $\text{SU}(2)_{L_0} \times \text{SU}(2)_{R_{K+1}}$ . Ainsi, les contraintes appliquées aux spurions ont également un effet sur le terme d'ordre le plus bas dans le lagrangien effectif, bien que celui-ci ne contienne pas explicitement les spurions: les spurions choisissent le sous-groupe  $S_{\text{réduit},K}$ . Le fait que cet alignement du vide survive dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  a un analogue en  $\chi\text{PT}$ , où l'on doit spécifier comment la limite chirale est prise afin de sélectionner la solution appropriée des équations de mouvement (on considère dans ce cas la limite  $M = m \mathbb{1}_{2 \times 2}$  avec  $m \rightarrow 0$  où  $M$  est définie en (2.101)).

Le résultat est que nous obtenons à cet ordre le même lagrangien que sous l'hypothèse de la déconstruction dimensionnelle (voir annexe F). Les autres interactions, en particulier celles qui seront non-locales, n'apparaîtront qu'aux ordres supérieurs en puissance des spurions. Le nombre de spurions nécessaires pour rendre les termes qui étaient invariants sous  $S_{\text{réduit},K}$  invariants sous  $S_{\text{naturel},K}$  donne l'ordre en puissance de  $\epsilon$  auquel ces termes vont apparaître. Nous discutons à présent ces termes.

### 4.1.2.3 Structure du lagrangien effectif

Nous avons décrit le formalisme des spurions et son utilisation pour la construction du lagrangien. Nous avons également discuté la solution des contraintes dans la jauge standard, qui permet de visualiser les interactions. Nous revenons à présent à l'écriture du lagrangien le plus général invariant sous le groupe de symétrie  $S_{\text{réduit},K}$ , dans lequel les termes brisant le groupe  $S_{\text{naturel},K}$  sont ordonnés selon une hiérarchie. Cette hiérarchie est définie par le nombre de spurions nécessaires pour rétablir l'invariance sous  $S_{\text{naturel},K}$ . En d'autres termes, on construit le lagrangien le plus général invariant sous  $S_{\text{naturel},K}$  contenant des spurions, ordonnant les termes selon les puissances de spurions. On impose ensuite les contraintes (4.22-4.23) sur les spurions, réduisant la symétrie à  $S_{\text{réduit},K} \subset S_{\text{naturel},K}$ .

Tous les termes invariants sous  $S_{\text{naturel},K}$  doivent donc faire partie du lagrangien effectif. Nous construisons ces termes à partir de briques élémentaires covariantes sous la symétrie  $\prod_{k=0}^K \text{SU}(2)_{L_k} \times \text{SU}(2)_{R_{k+1}}$ . On peut ensuite également appliquer des dérivées covariantes. Des exemples de briques élémentaires sont

$$\Sigma_{k,k+1} \mapsto L_k \Sigma_{k,k+1} R_{k+1}^\dagger, \quad (4.45)$$

$$X_k Y_k \mapsto R_k X_k Y_k L_k^\dagger, \quad (4.46)$$

$$X_k G_{k\mu\nu} Y_k \mapsto R_k X_k G_{k\mu\nu} Y_k L_k^\dagger. \quad (4.47)$$

Il nous faut de plus classifier ces termes suivant leur importance dans le lagrangien: ceci se fait selon le double développement en puissances des impulsions et en puissances des spurions. Une fois ceci fait, on injecte la solution des contraintes dans la jauge standard pour faire apparaître le contenu dynamique des divers termes. On obtient ainsi le lagrangien *réduit*, impliquant non pas les spurions  $X_k, Y_k$  mais uniquement leurs reliques  $\xi_k, \eta_k$ , qui permettent également de comptabiliser les puissances de  $\epsilon$  nécessaires. C'est ce lagrangien que l'on utilisera pour les applications pratiques, le lagrangien original invariant sous  $S_{\text{naturel},K}$  servant en réalité à déterminer les termes apparaissant à un ordre donné.

Nous avons déjà donné en (4.44) l'expression du lagrangien à l'ordre dominant  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0)$ : ce sont tous les termes dans lesquels les spurions n'apparaissent pas explicitement, et seulement ceux-ci. Nous discutons à présent les termes suivants. Les contraintes (4.22-4.23) peuvent directement être utilisées pour se débarrasser des termes comportant des dérivées covariantes appliquées aux spurions: ceci ne nécessite pas de se placer dans une jauge particulière. Ainsi, tous les termes apparaissant à l'ordre  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^2)$  s'avèrent être de simples renormalisations des termes  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0)$ . Ceci est dû à la relation

$$X_k X_k^\dagger = \xi_k^2 \mathbb{1}_{2 \times 2}, \quad (4.48)$$

où l'on sait que  $\xi_k$  est une constante indépendamment de la jauge. Grâce à la même identité, on peut montrer que les termes  $\mathcal{O}(p^0 \epsilon^l)$  avec  $l$  quelconque sont égaux à des constantes, suite aux contraintes, mais sans choix de jauge.

À l'ordre  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^4)$ , on obtient en revanche des termes nouveaux. Nous les écrivons à la fois dans l'écriture invariante sous  $S_{\text{naturel},K}$  et dans la jauge standard, pour mieux comprendre leur contenu dynamique. On trouve les termes suivants, pour  $k$  quelconque

$$\begin{aligned} & \left\langle D_\mu \Sigma_{k,k+1} X_{k+1} Y_{k+1} D^\mu \Sigma_{k+1,k+2} \Sigma_{k+1,k+2}^\dagger Y_{k+1}^\dagger X_{k+1}^\dagger \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle \\ & \stackrel{\text{j. s.}}{=} \xi_{k+1}^2 \eta_{k+1}^2 \left\langle \nabla_\mu \Sigma_{k,k+1} \nabla^\mu \Sigma_{k+1,k+2} \Sigma_{k+1,k+2}^\dagger \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.49)$$

ainsi que

$$\begin{aligned} & \left\langle G_{k\mu\nu} Y_k \Sigma_{k,k+1} X_{k+1} G_{k+1}^{\mu\nu} X_{k+1}^\dagger \Sigma_{k,k+1}^\dagger Y_k^\dagger \right\rangle \\ & \stackrel{\text{j. s.}}{=} \xi_{k+1}^2 \eta_k^2 \left\langle G_{k\mu\nu} \Sigma_{k,k+1} G_{k+1}^{\mu\nu} \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Nous verrons à la section 4.2.3 les conséquences des termes (4.49) et (4.50): ils donnent des corrections aux WSRs que nous obtiendrons à la section 4.2.1.1.

Revenant à la question des symétries et des termes permis dans le lagrangien, rappelons que le lagrangien réduit (4.44) n'est pas invariant sous la symétrie  $S_{\text{naturel}, K}$ , mais uniquement sous le sous-groupe d'invariance de la solution des contraintes  $S_{\text{réduit}, K}$ . Il n'y a donc pas de raison que les termes dans le second membre de (4.49) et (4.50) ne soient pas inclus dans le lagrangien effectif: ils seront en effet requis pour la renormalisation des boucles <sup>5</sup>. L'intérêt du formalisme des spurions est de montrer comment ces termes peuvent être traités de manière cohérente comme étant d'ordre supérieur, déterminant sans ambiguïtés l'ordre auquel ils doivent apparaître.

### 4.1.3 Redéfinitions des champs

La théorie effective que nous avons décrite jusqu'à présent est le siège de multiples mécanismes de Higgs: les  $K$  champs de jauge vont obtenir des masses, résultant en la disparition de  $K$  triplets de GBs du spectre. Il restera donc un multiplet de GBs. Nous verrons également qu'à l'ordre  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0)$ , la matrice de masse résultante pour les bosons vecteurs possède une structure bien particulière, due à la symétrie  $S_{\text{naturel}, K}$  (où, de façon équivalente, résultant de la restriction aux interactions entre plus proches voisin le long de la chaîne). Cette structure sera à l'origine des WSRs.

Pour décrire les mécanismes de Higgs, nous choisissons à nouveau, comme à la section 3.2.1, de travailler avec des champs invariants sous les symétries dynamiques. Nous donnerons les définitions complètes de ces champs, mais travaillerons par la suite dans la jauge standard. Nous définissons tout d'abord la matrice unitaire  $U$  décrivant les GBs restant dans le spectre. La normalisation est fixée par la condition d'unitarité

$$U = \Sigma_{0,1} U_1 \left( \prod_{j=1}^{K-1} V_j \Sigma_{j,j+1} U_{j+1} \right) V_K \Sigma_{K,K+1}. \quad (4.51)$$

$U$  ne contient que les parties angulaires  $U_k$  et  $V_k$  des spurions (voir (4.31) et (4.32)). Nous définissons ensuite les champs vecteurs  $W_k^\mu$  pour  $k = 1, \dots, K$  selon <sup>6</sup>

$$g_k W_k^\mu = i \left( \Sigma_{0,1} U_1 \prod_{j=1}^{k-1} V_j \Sigma_{j,j+1} U_{j+1} \right) D^\mu \left( \left( \prod_{j=1}^{k-1} U_{j+1}^\dagger \Sigma_{j,j+1}^\dagger V_j^\dagger \right) U_1^\dagger \Sigma_{0,1}^\dagger \right) - i \alpha_k U D^\mu U^\dagger. \quad (4.52)$$

Dans l'équation (4.52), nous avons introduit les coefficients  $\alpha_k$  définis par

$$\alpha_k = f_\pi^2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{f_j^2}, \quad \text{pour } k = 1, \dots, K, \quad (4.53)$$

en fonction de

$$\frac{1}{f_\pi^2} = \sum_{j=0}^K \frac{1}{f_j^2}. \quad (4.54)$$

Notons que, d'après les propriétés de transformations de  $U_k$  et  $V_k$ , on a

$$D_\mu U_k = \partial_\mu U_k - i R_{k\mu} U_k + i g_k U_k G_{k\mu}, \quad (4.55)$$

$$D_\mu V_k = \partial_\mu V_k - i g_k G_{k\mu} V_k + i V_k L_{k\mu}, \quad (4.56)$$

qui sont identiquement nulles étant données les contraintes (4.22-4.23), et ceci sans choix de jauge. Les propriétés de transformation des champs que nous venons de définir sont les suivantes

$$U \mapsto L_0 U R_{K+1}^\dagger, \quad (4.57)$$

$$W_{k\mu} \mapsto L_0 W_{k\mu} L_0^\dagger, \quad \text{pour } k = 1, \dots, K. \quad (4.58)$$

Appliquant ensuite le changement de variable

$$\{G_{1\mu}, \dots, G_{K\mu}, \Sigma_{0,1}, \dots, \Sigma_{K,K+1}\} \rightarrow \{W_{1\mu}, \dots, W_{K\mu}, U, \Sigma_{1,2}, \dots, \Sigma_{K,K+1}\}, \quad (4.59)$$

<sup>5</sup>. Ceci a depuis été vérifié explicitement dans [KNP04].

<sup>6</sup>. Ceci est une généralisation de la transformation inverse de Stückelberg de l'équation (3.37).



on trouve que le lagrangien effectif écrit en termes des nouvelles variables ne dépend pas de  $\Sigma_{1,2}, \dots, \Sigma_{K,K+1}$ : ceci est une expression du mécanisme de Higgs. De plus, le choix (4.53) pour les coefficients  $\alpha_k$  élimine les termes de mélanges entre les GBs  $U$  et les champs vectoriels  $W_{k\mu}$ .

Comme déjà mentionné, il sera suffisant pour la suite de travailler avec le lagrangien réduit, et d'utiliser de façon générale les expressions des différents objet dans la jauge standard. Ceci permet en outre de rendre plus apparent le contenu en champs. On a

$$U \stackrel{\text{j. s.}}{=} \prod_{j=0}^K \Sigma_{j,j+1}, \quad (4.60)$$

$$g_k W_k^\mu \stackrel{\text{j. s.}}{=} i \left( \prod_{j=0}^{k-1} \Sigma_{j,j+1} \right) \nabla^\mu \left( \prod_{j=0}^{k-1} \Sigma_{j,j+1} \right)^\dagger - i \alpha_k U \nabla^\mu U^\dagger, \quad \text{pour } k=1, \dots, K. \quad (4.61)$$

Ecrivant alors le lagrangien effectif en termes des nouvelles variables, on identifie la constante  $f_\pi$  définie en (4.54) comme la constante de désintégration des GBs restant dans le spectre (pour des détails concernant les étapes menant à ces résultats, voir l'annexe H.1).

De plus, on trouve (équation (H.13)) que le coefficient dans la  $k$ -ième ligne et la  $k'$ -ième colonne de la matrice de masse  $\mathcal{M}^2$  pour les champs  $W_k^\mu$  est donné par

$$[\mathcal{M}^2]_{k,k'} = \frac{1}{4} (\delta_{k,k'} g_k^2 (f_{k-1}^2 + f_k^2) - (\delta_{k,k'+1} + \delta_{k+1,k'}) g_k g_{k+1} f_k^2), \quad (4.62)$$

pour  $k, k' = 1, \dots, K$ . Plus explicitement, on peut écrire

$$4\mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} g_1^2 (f_0^2 + f_1^2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & 0 & g_k^2 (f_{k-1}^2 + f_k^2) & -g_k g_{k+1} f_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & -g_k g_{k+1} f_k^2 & g_{k+1}^2 (f_k^2 + f_{k+1}^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_K^2 (f_{K-1}^2 + f_K^2) \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

Le fait que cette matrice soit tri-diagonale provient directement de la localité des interactions le long de la chaîne, puisque les termes de masse pour les bosons vecteurs proviennent des termes cinétiques pour les GBs.

Notons que les éléments de cette matrice sont comptabilisés comme d'ordre  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0)$ , puisqu'ils contiennent deux puissances de couplages de jauge, généralisant le cas de (3.45) et permettant un développement cohérent. D'autre part, on sait que les champs vectoriels massifs ne peuvent appartenir à la LEET que si leurs masses sont petites devant l'échelle à laquelle la théorie effective ne s'applique plus, et où les autres résonances doivent apparaître. Nous avons vu à la section 2.3.2 que, dans le cas de la  $\chi$ PT, les estimations indiquaient une valeur de l'ordre de  $4\pi f_\pi$  [MG84, Geo84].

## 4.2 Le corrélateur gauche-droit

La figure 4.3 représente le cas particulier  $K=2$  correspondant au cas général d'une chaîne de  $K$  champs de jauge en interactions avec  $K+1$  triplets de GBs. Suite au mécanisme de Higgs dynamique produisant la matrice de masse (4.62) pour les champs vecteurs, tous ces GBs disparaissent du spectre, excepté la combinaison paramétrée par  $U$ .

Cette théorie possède une symétrie chirale global  $\text{SU}(2)_{L_0} \times \text{SU}(2)_{R_{K+1}}$  spontanément brisée vers son sous-groupe vectoriel. Ceci fournit donc une généralisation du cas de la  $\chi$ PT, qui correspond au cas  $K=0$ . Les courants de Noether de la symétrie, ainsi que leurs fonctions de Green, sont extraits en considérant les dérivées fonctionnelles par rapport aux sources  $L_{0\mu}$  et  $R_{K+1\nu}$  présentes dans (4.44).

En plus de cela, le lagrangien (4.44) possède des propriétés à haute énergie qui rappellent celles de la QCD. En effet, en QCD, on peut déduire de la symétrie chirale et du développement en produits d'opérateurs (*operator product expansion* ou OPE) que les deux règles de somme de Weinberg [Wei67b] doivent être satisfaites. La fonction à deux points des courants gauche et droit se transforme suivant la représentation (3,3) du groupe chirale  $SU(2) \times SU(2)$ : il se trouve qu'on ne peut pas construire d'opérateurs locaux avec une dimension physique strictement inférieure à six [SVZ79] se transformant ainsi. Il en découle que le corrélateur gauche-droit décroît plus rapidement à courtes distances. Pour plus de détails sur ces points, voir l'annexe G.

Les auteurs de [SS03] ont montré que le lagrangien (4.44) au niveau des arbres menait aux deux règles de somme de Weinberg, conduisant à un comportement plus doux aux hautes énergies <sup>7</sup>. De même qu'en QCD, cette particularité ne découle pas des symétries à basse énergie elles-mêmes. Dans le cas du lagrangien (4.44), la propriété cruciale est la localité, rendue explicite par l'écriture suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2,0)} \stackrel{\text{j. s.}}{=} & \mathcal{L}_0(L_{0\mu}, \Sigma_{0,1}, G_{1\mu}) + \mathcal{L}_K(G_{K\mu}, \Sigma_{K,K+1}, R_{K+1\mu}) \\ & + \sum_{k=1}^{K-1} \mathcal{L}_k(G_{k\mu}, \Sigma_{k,k+1}, G_{k+1\mu}). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Ceci a pour effet de reléguer les contributions à des ordres supérieurs. Nous avons vu à la section 4.1 que le lagrangien  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0)$  présentait automatiquement cette propriété de localité. Nous montrons dans cette section que ceci conduit aux deux WSRs ainsi qu'à leurs généralisations. Nous commentons également les corrections à ces WSRs généralisées, dues aux termes d'ordre supérieur en puissances des spurions.

## 4.2.1 WSRs généralisées

### 4.2.1.1 WSRs et localité

Les WSRs mentionnées ci-dessus ont trait à la fonction à deux points des courants de Noether correspondant aux symétries sous lesquelles le triplet de GBs se transforme. Nous étudions donc dans cette section le corrélateur suivant à l'ordre  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0)$

$$4i \int dx e^{iq \cdot x} \langle 0 | T J_{L_0}^{a\mu}(x) J_{R_{K+1}}^{b\nu}(0) | 0 \rangle = -\delta^{ab} (\eta^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi_{LR}(-q^2). \quad (4.65)$$

Une première approche pour évaluer cette intégrale serait de prendre la dérivée de l'intégrale fonctionnelle par rapport aux sources correspondantes, puis d'évaluer les diagrammes dans la base des champs vectoriels qui diagonalisent la matrice de masse  $\mathcal{M}^2$  donnée en (4.62). Une telle approche du calcul est décrite à l'annexe H.3, car elle est utile pour pousser plus loin l'étude du corrélateur gauche-droit présentée à l'annexe H. En revanche, nous utilisons ici une autre méthode qui rend plus transparente l'origine des WSRs.

Nous extrayons tout d'abord les expressions des courants en termes des champs  $W_{k\mu}$ , pour lesquels la matrice de masse n'est pas diagonale. Ces champs sont en revanche plus proches de l'écriture originale en termes des champs  $G_{k\mu}$ . A partir du lagrangien (4.44), on trouve ainsi les expressions suivantes, généralisant (2.76) et (3.48) <sup>8</sup>

$$\begin{aligned} J_{L_0}^{a\mu} &= \left. \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta L_{0\mu}^a} \right|_{L_0 \rho=0, R_{K+1} \sigma=0} \\ &\stackrel{\text{j. s.}}{=} -\frac{g_1 f_0^2}{4} W_1^{a\mu} - i \frac{f_\pi^2}{4} \{U \partial^\mu U^\dagger\}^a, \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} J_{R_{K+1}}^{a\mu} &= \left. \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta R_{K+1\mu}^a} \right|_{L_0 \rho=0, R_{K+1} \sigma=0} \\ &\stackrel{\text{j. s.}}{=} -\frac{g_K f_K^2}{4} \{U^\dagger W_K^\mu U\}^a - i \frac{f_\pi^2}{4} \{U^\dagger \partial^\mu U\}^a. \end{aligned} \quad (4.67)$$

<sup>7</sup>. Ceci permet d'ailleurs une autre interprétation du phénomène de *little Higgs*, voir section H.5.3.

<sup>8</sup>. Le manque de symétrie entre les deux équations est juste dû à notre définition pour les champs  $W_{k\mu}$ , qui n'est pas symétrique par rapport au milieu de la chaîne. Ceci permet en revanche de n'avoir qu'une définition pour les champs  $W_{k\mu}$ .

Pour évaluer la fonction à deux points en arbres, nous avons uniquement besoin des termes linéaires en champs, qui sont les suivants

$$J_L^{a\mu} = -\frac{g_1 f_0^2}{4} W_1^{a\mu} + \frac{f_\pi}{2} \partial^\mu \pi^a + \dots, \quad (4.68)$$

$$J_R^{a\mu} = -\frac{g_K f_K^2}{4} W_K^{a\mu} - \frac{f_\pi}{2} \partial^\mu \pi^a + \dots, \quad (4.69)$$

lorsque l'on utilise la paramétrisation

$$U = e^{-i \frac{\pi^a \tau^a}{f_\pi}}. \quad (4.70)$$

Les contributions en arbres à  $\Pi_{LR}$  proviennent de l'échange de GBs ou de bosons vecteurs, pour lesquels seul le terme reliant le champ  $W_{1\mu}$  au champ  $W_{K\nu}$  contribue. On obtient alors, utilisant une écriture matricielle pour le propagateur des champs  $W_{k\mu}$

$$\begin{aligned} & 4i \int dx e^{iq \cdot x} \langle 0 | T J_L^{a\mu}(x) J_R^{b\nu}(0) | 0 \rangle \\ &= \delta^{ab} \frac{g_1 g_K f_0^2 f_K^2}{4} \left[ (\eta^{\mu\nu} \mathbb{1} - q^\mu q^\nu (\mathcal{M}^2)^{-1}) (q^2 \mathbb{1} - \mathcal{M}^2)^{-1} \right]_{1,K} + \delta^{ab} f_\pi^2 \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \\ &= \delta^{ab} \frac{g_1 g_K f_0^2 f_K^2}{4} (\eta^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \left[ (\mathcal{M}^2)^{-1} (q^2 \mathbb{1} - \mathcal{M}^2)^{-1} \right]_{1,K} \\ &+ \delta^{ab} f_\pi^2 \left( \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - \eta^{\mu\nu} \right) \\ &+ \delta^{ab} \eta^{\mu\nu} \left( f_\pi^2 - \frac{g_1 g_K f_0^2 f_K^2}{4} [(\mathcal{M}^2)^{-1}]_{1,K} \right). \end{aligned} \quad (4.71)$$

On développe ensuite cette expression (4.71) pour  $Q^2 = -q^2 \rightarrow +\infty$ , sous la forme

$$4i \int dx e^{iq \cdot x} \langle 0 | T J_L^{a\mu}(x) J_R^{b\nu}(0) | 0 \rangle = \delta^{ab} (\eta^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c_l}{Q^{2(l+1)}}. \quad (4.72)$$

A cet effet, on utilise les identités

$$- \left[ (\mathcal{M}^2)^{-1} (Q^2 \mathbb{1} + \mathcal{M}^2)^{-1} \right]_{1,K} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[(\mathcal{M}^2)^{l-1}]_{1,K}}{(-Q^2)^{l+1}}, \quad (4.73)$$

on trouve

$$c_0 = f_\pi^2 - \frac{g_1 g_K f_0^2 f_K^2}{4} [(\mathcal{M}^2)^{-1}]_{1,K}, \quad (4.74)$$

$$c_l = (-1)^{l+1} \frac{g_1 g_K f_0^2 f_K^2}{4} [(\mathcal{M}^2)^{l-1}]_{1,K} \quad \text{pour } l \geq 1. \quad (4.75)$$

On constate, étant donnée la forme de la matrice de masse (4.63), que

$$[(\mathcal{M}^2)^{l-1}]_{1,K} = 0, \quad \text{pour } l = 1, \dots, K-1. \quad (4.76)$$

Ceci montre que tous les termes en  $1/Q^{2(l+1)}$  dans (4.72) ont des coefficients nuls pour  $1 \leq l \leq K-1$ . Ainsi, pour  $K \geq 2$ , le cas  $l=1$  correspond à l'annulation du terme en  $1/Q^4$  dans le développement à grand  $Q^2$  de  $\Pi_{LR}$ : ceci constitue la seconde règle de Weinberg.

Il reste à montrer que le terme  $l=0$  a également un coefficient nul, pour  $K \geq 1$ <sup>9</sup>. La transversité de la fonction à deux points impose, d'après la relation (4.71)

$$f_\pi^2 - \frac{g_1 g_K f_0^2 f_K^2}{4} [(\mathcal{M}^2)^{-1}]_{1,K} = 0, \quad (4.77)$$

d'où découle, d'après (4.74)

$$c_0 = 0. \quad (4.78)$$

<sup>9</sup>. Si  $K=0$ , la seule contribution à la fonction à deux points est due aux GBs. Autrement dit, la matrice dont on devrait prendre l'élément  $(1, K)$  dans le dernier terme de (4.77) n'existe pas.

Une dérivation alternative de ce résultat est mentionnée à l'annexe H.2. L'annulation de la constante  $c_0$  implique que le terme  $l=0$  est absent du développement à grand  $Q^2$  de  $\Pi_{LR}(Q^2)$  (4.72). Nous retrouvons ainsi la première règle de somme de Weinberg, dès lors que la chaîne comporte un site intermédiaire. La deuxième WSR est obtenue automatiquement à cet ordre si  $K \geq 2$ . Nous avons aussi vu que l'on obtenait une généralisation de ces deux WSRs: dans le cas du *moose* ouvert linéaire avec  $K$  sites, la fonction  $\Pi_{LR}(Q^2)$  décroît à grand  $Q^2$  comme  $1/Q^{2(K+1)}$  au lieu de l'estimation naïve de  $1/Q^2$ . Ceci signifie que les  $K$  premiers paramètres d'ordre apparaissant dans le développement OPE de  $\Pi_{LR}(Q^2)$  sont nuls <sup>10</sup>. Ceci fait le lien entre le comportement à haute énergie des *mooses* ouverts linéaires et la réalisation de la brisure de la symétrie chirale.

A l'ordre  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0)$  auquel nous travaillons, on ne considère que les diagrammes en arbres. Comme décrit à l'annexe G.2, les WSRs correspondent dans ce cas à des relations algébriques entre les constantes de couplages des champs vectoriels massifs et leurs masses. La dérivation des WSRs présentée à l'annexe H.3 correspond à une telle vision des choses.

#### 4.2.1.2 Autres aspects de $\Pi_{LR}$ à haute énergie

Dans cette section, nous mentionnons d'autres propriétés du corrélateur gauche-droit. L'obtention de ces résultats passe par l'écriture du corrélateur gauche-droit utilisée à l'annexe H.3, utilisant la base physique pour les résonances vectorielles. Les détails nécessaires pour reproduire les résultats présentés ci-dessous se trouvent donc à l'annexe H.3. Il nous suffit ici de mentionner que l'on peut mettre la fonction  $\Pi_{LR}(Q^2)$  sous la forme

$$\Pi_{LR}(Q^2) = -\frac{f_\pi^2}{Q^2} + \sum_{n=1}^K \frac{F_n^2}{Q^2 + M_n^2} \quad (4.79)$$

$$= -\frac{f_\pi^2}{Q^2} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{\sum_{n=1}^K F_n^2 M_n^{2(l-1)}}{Q^{2l}}. \quad (4.80)$$

Dans cette équation, les masses  $M_n^2$  sont les valeurs propres (inconnues dans le cas général) de la matrice  $\mathcal{M}^2$ . Les constantes de couplages  $F_n^2$  peuvent s'exprimer sous les deux formes équivalentes <sup>11</sup>

$$F_n^2 = 4 \sum_{k,k'=1}^K M_n^2 b_n^k b_n^{k'} \frac{\alpha_k}{g_k} \frac{1 - \alpha_{k'}}{g_{k'}} \quad (4.81)$$

$$= \frac{1}{4} g_1 g_K f_0^2 f_K^2 \frac{b_n^1 b_n^K}{M_n^2}, \quad (4.82)$$

où intervient la matrice orthogonale  $b$  permettant la diagonalisation de  $\mathcal{M}^2$  selon

$$\sum_{k,k'=0}^K [\mathcal{M}^2]_{k,k'} b_m^k b_n^{k'} = M_n^2 \delta_{mn}. \quad (4.83)$$

Ici encore, on ne sait pas déterminer explicitement la matrice de passage  $b$  dans le cas général: on peut cependant obtenir certains résultats. Par ailleurs, nous présenterons un exemple explicite dans le cas le plus simple à l'annexe H.6.

A partir des expressions (4.80) et (4.82), on peut déterminer le premier moment non-nul dans le développement à grand  $Q^2$  de  $\Pi_{LR}$ . On obtient ainsi

$$\sum_{n=1}^K F_n^2 M_n^{2K} = 4 (-1)^{K-1} \left( \prod_{i=1}^K g_i^2 \right) \left( \prod_{j=0}^K \frac{f_j^2}{4} \right), \quad (4.84)$$

ce qui donne le résultat suivant, d'après (4.80): la fonction  $\Pi_{LR}$  décroît asymptotiquement à grand  $Q^2$  comme

$$\Pi_{LR}(Q^2) = - \left( \prod_{i=1}^K g_i^2 \right) \left( \prod_{j=0}^K \frac{f_j^2}{4} \right) \frac{1}{Q^{2(K+1)}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Q^{2(K+2)}}\right). \quad (4.85)$$

<sup>10</sup>. En relation avec ces remarques, voir également section G.1.

<sup>11</sup>. Nous donnerons à l'annexe H.5.1 une expression de  $F_n^2$  en fonction uniquement des valeurs propres de  $\mathcal{M}^2$ .

On constate que le résultat obtenu satisfait à l'inégalité suivante <sup>12</sup>

$$\lim_{Q^2 \rightarrow +\infty} -Q^2 \Pi_{LR}(Q^2) \geq 0, \quad (4.86)$$

qui est par ailleurs bien cohérente avec le résultat de positivité obtenu par Witten [Wit83] dans le cas spécifique de la QCD. Ceci confirme le résultat de [KdR98], où les contributions des résonances étaient considérées indépendamment d'un lagrangien, mais en imposant la parité.

### 4.2.2 Autres conséquences

Nous nous concentrons à présent sur les conséquences à basse énergie de la théorie effective. A nouveau, on peut déduire certains résultats sans connaître la forme explicite de la matrice de passage  $b$  apparaissant en (4.83). Par intégration des champs vectoriels massifs, on peut en principe déterminer les valeurs des LECs du lagrangien chirale décrivant la physique à une énergie encore plus basse, inférieure à la masse du champ vectoriel le plus léger. L'intégration des résonances massives nécessite que leurs masses soient paramétriquement plus grandes que celles des autres particules. Dans notre cas, les champs vectoriels ont des masses faibles, puisque comptabilisées comme  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0)$ . La procédure a cependant un sens, puisque les autres particules présentes dans le spectre sont les GBs de masse nulle.

Comme première application, on peut déterminer la valeur de la constante  $L_{10}$ , liée au corrélateur gauche-droit, que l'on trouverait dans le lagrangien de Gasser-Leutwyler (2.77) obtenu après intégration des champs massifs. Pour cela, on peut utiliser les équations de mouvement des résonances suivant [EGPdR89], ou directement utiliser la relation donnée en (G.13)

$$\begin{aligned} L_{10} &= -\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} ds \left( \frac{1}{\pi} \text{Im}(\Pi_{LR}(s)) + f_\pi^2 \delta(s) \right) \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^K \frac{F_n^2}{M_n^2}, \end{aligned} \quad (4.87)$$

ce qui donne ici, utilisant (4.81)

$$\begin{aligned} L_{10} &= - \sum_{k,k'=1}^K \sum_{n=1}^K b_n^k b_n^{k'} \frac{\alpha_k}{g_k} \frac{1-\alpha_{k'}}{g_{k'}} \\ &= - \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k (1-\alpha_k)}{g_k^2}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

On peut déterminer le signe de cette expression: d'après (4.53), les valeurs des  $\alpha_k$  sont telles que

$$0 < \alpha_k < 1, \quad \text{pour } k=1, \dots, K, \quad (4.89)$$

ce qui implique un signe négatif pour l'expression (4.88). D'autre part, les constantes  $\alpha_k$  sont connues explicitement dans le cas général (4.53), et l'on a donc une expression explicite pour  $L_{10}$  en fonction des paramètres du lagrangien (4.44), sans avoir à diagonaliser la matrice de masse. L'importance du signe de  $L_{10}$  est la suivante: si l'on considère de telles théories effectives pour décrire le secteur de brisure électrofaible, couplant des champs de jauge SU(2) et U(1) aux extrémités de la chaîne (voir référence [HS04b]), on trouvera alors toujours une contributions positive en arbres au paramètre  $S$  <sup>13</sup>. Bien que le signe soit fixé, la magnitude dépend des valeurs des différentes constantes. En particulier, si l'on a  $f_K \ll f_k$  pour  $k=0, \dots, K-1$ , on peut obtenir une valeur faible. L'autre possibilité, qui serait de considérer des  $g_k$  grands, serait incohérente avec le comptage de puissance  $g_k = \mathcal{O}(p)$  et impliquerait que l'approximation en arbres n'est pas justifiée.

D'autres applications sont décrites à l'annexe H.4, permettant de déterminer la valeurs d'autres LECs.

La plupart des résultats présentés ci-dessus et à la section 4.2.1 sont illustrés dans le cas le plus simple à l'annexe H.6.

<sup>12</sup>. En réalité, on peut montrer que l'inégalité de Witten est vérifiée pour tout  $Q^2 \geq 0$  (voir annexe H.5.2).

<sup>13</sup>. Le signe de cette LEC peut être modifié dans les situations où l'on a moins de WSRs que de résonances [KdR98].

### 4.2.3 Corrections aux WSRs

Les termes supérieurs du développement en puissances des spurions apporteront des corrections aux WSRs. Les premiers termes de ce type sont d'ordre  $\mathcal{O}(p^2\epsilon^4)$ : il s'agit des termes non-locaux mentionnés en (4.49-4.50). A un ordre donné du développement, seul un nombre limité d'entre eux apparaîtra, avec un degré de non-localité le long de la chaîne limité.

Nous considérons le lagrangien suivant, où les termes  $\mathcal{O}(p^2\epsilon^4)$  du type de (4.49) ont été ajoutés au lagrangien  $\mathcal{O}(p^2\epsilon^0)$  donné en (4.44)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' \stackrel{\text{j. s.}}{=} & \frac{1}{4} \sum_{k=0}^K f_k^2 \left\langle \nabla_\mu \Sigma_{k,k+1} \nabla^\mu \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \langle G_{k\mu\nu} G_k^{\mu\nu} \rangle \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{K-1} \xi_{k+1}^2 \eta_{k+1}^2 f_{k,k+1} \left\langle \nabla_\mu \Sigma_{k,k+1} \nabla^\mu \Sigma_{k+1,k+2} \Sigma_{k+1,k+2}^\dagger \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Etudiant l'expression du corrélateur gauche-droit dérivé de ce lagrangien à l'ordre des arbres, et jusqu'à l'ordre  $\mathcal{O}(p^2\epsilon^4)$ , on trouve que la dernière ( $K$ -ième) WSR est modifiée. En pratique, ceci signifie que la somme

$$\sum_{n=1}^K F_n^2 M_n^{2(K-1)} = \mathcal{O}(p^{2(K-1)}\epsilon^4), \quad (4.91)$$

n'est plus égale à zéro, mais est d'ordre  $\mathcal{O}(p^{2(K-1)}\epsilon^4)$ . Ceci est représenté une petite correction à la  $K$ -ième WSR, puisque les termes individuels dans la somme du membre de gauche sont d'ordre  $\mathcal{O}(p^{2(K-1)}\epsilon^0)$ . Ce résultat confirme bien l'idée naïve que les interactions non-locales réduisent la longueur de la chaîne et font donc perdre les dernières WSRs. En effet, les combinaisons linéaires de termes du type

$$\left\langle \nabla_\mu \Sigma_{k,k+1} \nabla^\mu \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle, \quad (4.92)$$

et

$$\left\langle \nabla_\mu \Sigma_{k,k+1} \nabla^\mu \Sigma_{k+1,k+2} \Sigma_{k+1,k+2}^\dagger \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle, \quad (4.93)$$

peuvent être écrites comme combinaisons de

$$\left\langle \nabla_\mu \Sigma_{k,k+1} \nabla^\mu \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle, \quad (4.94)$$

et

$$\left\langle \nabla_\mu (\Sigma_{k,k+1} \Sigma_{k+1,k+2}) \nabla^\mu (\Sigma_{k+1,k+2}^\dagger \Sigma_{k,k+1}^\dagger) \right\rangle. \quad (4.95)$$

Dans ces termes, la transformation droite de  $\Sigma_{k,k+1}$  est identifiée avec la transformation gauche de  $\Sigma_{k+1,k+2}$  sans impliquer de puissances de couplage. En revanche, on voit dans (4.90) que la présence des spurions entraîne que de tels termes sont multipliés par une constante d'ordre  $\epsilon^4$ .

Revenant à notre discussion de la fonction à deux points, on peut voir que, tant que développement en puissances des spurions est approprié, c'est-à-dire si l'on a bien

$$\xi_{k+1}^2 \eta_{k+1}^2 |f_{k,k+1}| \ll f_j^2, \quad (4.96)$$

alors la constante  $L_{10}$  restera négative.

Considérons maintenant les termes supplémentaires  $\mathcal{O}(p^2\epsilon^4)$  quadratiques en courbures des champs de jauge, tels (4.50). L'effet de ces termes supplémentaires est différent: la diagonalisation des termes cinétiques est modifiée dans ce cas. Si ces termes sont ajoutés au lagrangien, toutes les WSRs excepté la première obtiennent des corrections: la somme

$$\sum_{n=1}^K F_n^2 M_n^{2(l-1)} = \mathcal{O}(p^{2(l-1)}\epsilon^4), \quad \text{pour } l=2, \dots, K, \quad (4.97)$$

est évaluée comme étant d'ordre  $\mathcal{O}(p^{2(l-1)}\epsilon^4)$  tandis que les termes individuels sont d'ordre  $\mathcal{O}(p^{2(l-1)}\epsilon^0)$ . En revanche, la première WSR, qui est reliée à la transversité de la fonction à deux points (voir équation (4.71)), reste valable. En réalité, les ordres supérieurs du développement fourniront des termes qui donneront également des corrections à cette règle, tout en préservant la transversité de la fonction à deux points. De tels termes peuvent uniquement apparaître à l'ordre  $\mathcal{O}(p^3\epsilon^2)$ . Ce sont des termes similaires à (4.49), mais impliquant les sources

$$\left\langle L_{0\mu\nu}\Sigma_{0,1}X_1G_1^{\mu\nu}X_1^\dagger\Sigma_{0,1}^\dagger \right\rangle = \mathcal{O}(p^3\epsilon^2), \quad (4.98)$$

$$\left\langle G_{K\mu\nu}Y_K\Sigma_{K,K+1}R_{K+1}^{\mu\nu}\Sigma_{K,K+1}^\dagger Y_K^\dagger \right\rangle = \mathcal{O}(p^3\epsilon^2). \quad (4.99)$$

Finalement, nous voyons que les WSRs sont modifiées par les termes supérieurs dans le développement en puissance des spurions. Du moment que  $\xi_k$  et  $\eta_k$  sont effectivement des petits paramètres, ces modifications représentent des petites corrections: la somme de termes individuels d'un ordre donné est supprimée par un facteur  $\mathcal{O}(p^0\epsilon^4)$  relativement aux termes individuels. Ceci est similaire au cas de la QCD, où la seconde règle de somme de Weinberg obtient des corrections en puissances des masses de quarks, lesquelles proviennent de spurions en  $\chi$ PT (voir section 2.3.3).

En complément, précisons que l'annexe I étudie les conséquences des termes supplémentaires (4.49-4.50) en arbres dans un cadre plus général, indépendamment du développement spurionique.

### 4.3 Résumé

Dans cette section, nous avons utilisé l'idée de naturalité pour construire un développement en puissances de paramètres décrivant la réduction de symétrie du groupe  $S_{\text{naturel},K}$  vers son sous-groupe  $S_{\text{réduit},K}$ . Le groupe  $S_{\text{naturel},K}$  correspond à un *moose* disjoint dans lequel les GBs n'interagissent pas avec les champs de jauge. Les interactions sont introduites *via* la contrainte de constance covariante imposée sur les spurions. La solution explicite de ces équations de contraintes n'est en effet invariante que sous le sous-groupe  $S_{\text{réduit},K}$ , impliquant l'identification des transformations appliquées aux GBs avec celles des champs de Yang-Mills. Les contraintes impliquent également qu'il existe une certaine jauge, la jauge standard, dans laquelle les spurions se réduisent à des constantes. Ce sont précisément ces constantes qui peuvent être utilisées de façon cohérente comme paramètres de développement, en relation avec l'idée de naturalité.

Le lagrangien obtenu à l'ordre dominant est celui d'un *moose* linéaire ouvert tel qu'on le déduirait du principe de déconstruction dimensionnelle: il ne contient que des interactions locales le long de la chaîne. Il en découle un ensemble de règles de somme de Weinberg généralisées, en nombre égal au nombre de sites de la chaîne. Le formalisme des spurions fournit un cadre pour le développement perturbatif incluant à chaque ordre des interactions entre voisins de plus en plus éloignés le long du *moose*. En particulier, à l'ordre sous-dominant en puissances de  $\epsilon$  apparaissent des corrections à toutes les WSRs, excepté la première.

Le formalisme des spurions pour introduire le couplage entre les GBs et les champs de jauge, et de façon plus générale, entre les GBs et un secteur élémentaire nous servira au chapitre 5 pour remédier à certaines difficultés phénoménologiques qui affectent les théories effectives pour l'EWSB sans Higgs.

L'étude des modèles *moose* présentée dans ce chapitre suggère par ailleurs certaines remarques. En effet, ces modèles fournissent une extension de la  $\chi$ PT. La validité des WSRs dans ces extensions implique un comportement plus doux à haute énergie. Ceci signifie de plus que les paramètres d'ordre apparaissant dans le développement OPE du corrélateur gauche-droit sont supprimés. La théorie sous-jacente dont ce *moose* pourrait être la LEET est donc différente de la QCD: la brisure de la symétrie chirale y est réalisée différemment. On peut se demander en quoi cette théorie sous-jacente devrait différer de la QCD. Ces questions dépassent cependant le cadre de la théorie effective.

La théorie effective décrite dans le présent chapitre peut également être utile en connexion avec la limite de grand  $N_c$  en QCD. On s'intéresserait alors aux cas  $K = 1$  où  $K = 2$  avec  $N_c$  grand, et non pas à la limite de  $K$  grand avec  $N_c$  fini qui a été considérée dans la littérature [SS03, CKT04]. On devrait alors établir un lien entre le comptage chirale et celui de grand  $N_c$ , la correspondance utilisant les relations  $f_k = \mathcal{O}(\sqrt{N_c})$  et  $g_k = \mathcal{O}(1/\sqrt{N_c})$  (cette dernière n'ayant rien à voir avec la limite de 't Hooft  $\alpha_{\text{QCD}} N_c = \text{constante}$ )<sup>14</sup>. Une telle idée reste encore à mettre en pratique. L'intérêt d'avoir une LEET par rapport à un modèle réside dans la possibilité de considérer systématiquement les fonctions de Green à un nombre de points plus grand, ainsi que dans la possibilité d'améliorer l'approximation en travaillant à l'ordre suivant.

---

14. Ces comptages de grand  $N_c$  impliquent en particulier que les masses des résonances seront comptabilisées comme  $\mathcal{O}(N_c^0)$  et les constantes  $L_1, L_2, L_3, L_9, L_{10}, H_1$  d'ordre  $\mathcal{O}(N_c)$ , comme il se doit [GL84].





# Chapitre 5

## Théorie effective pour le secteur électrofaible: utilisation des spurions

Ce chapitre utilise le formalisme des spurions introduit au chapitre 4 et l'applique à la construction de la théorie effective de l'EWSB sans particule de Higgs. Rappelons que le but est de décrire un secteur de brisure pour le secteur électrofaible, où les seuls champs scalaires légers sont les trois GBs nécessaires pour donner leurs masses aux  $W^\pm$  et  $Z^0$ . Le spectre de basse énergie ne contient alors pas de scalaires légers. L'échelle caractéristique de cette LEET, à laquelle cette dernière devient inapplicable, est d'ordre de  $\Lambda \sim 4\pi f \sim 3$  TeV.

Nous avons déjà souligné que la limite  $m_H \rightarrow \infty$  du SM ne correspondait qu'à un jeu particulier des constantes apparaissant à l'ordre  $\mathcal{O}(p^4)$  dans la théorie effective (analogues des  $L_i$  de la  $\chi$ PT). Ces constantes nous sont en revanche inconnues dans le cas d'autres modèles sous-jacents. Avant de s'intéresser aux petites corrections d'ordre  $\mathcal{O}(p^4)$ , on doit cependant reconsidérer la formulation générale de la théorie. Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur les difficultés qui survient dès l'ordre  $\mathcal{O}(p^2)$ .

On explique en premier lieu quelles sont les difficultés rencontrées dans l'approche classique des théories effectives avec le seul comptage chirale introduit au chapitre 2 et utilisé pour le cas  $SU(2)$  au chapitre 3. Dans ce cas, on utilise directement le lagrangien effectif générant les fonctions de Green des courants de la symétrie brisée  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ , identifiant quatre des sources aux champs de Yang-Mills dynamiques de  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ . Nous discutons les problèmes rencontrés dans cette approche: certains opérateurs qui étaient *irrelevant*s dans le cas du SM car ils étaient quadratiques en le champ de Higgs (voir section 1.6.2) apparaissent ici dès l'ordre dominant  $\mathcal{O}(p^2)$ , et ne sont plus supprimés par une échelle de masse.

L'application du formalisme des spurions au cas électrofaible sans particule de Higgs est ensuite exposée. L'accent est mis sur la résolution des difficultés précédemment mentionnées, et également sur les premiers effets spurioniques remarquables.

### 5.1 Difficultés de la théories effective sans Higgs basée sur la symétrie $SU(2) \times U(1)$

Dans cette section, nous présentons une extension du cadre de la théorie effective développée au chapitre 3. Ce chapitre traitait d'une théorie de Yang-Mills  $SU(2)$  couplée aux trois GBs de la brisure  $SU(2) \times SU(2) \rightarrow SU(2)$ . En vue d'une application au secteur électrofaible, le champ de jauge  $U(1)_Y$  est à présent introduit. Notons que nous avons déjà discuté l'introduction de ce champ abélien en le couplant à la théorie effective de la QCD dans la limite de deux saveurs de masses nulles en 1.7.3. C'est en des termes analogues qu'est souvent analysée la technicouleur. Nous présentons une telle discussion à l'annexe C. Au lagrangien effectif du secteur de brisure, on ajoute alors uniquement les termes de courbures au carré pour chacun des groupes de Yang-Mills. L'identification entre sources et champs est également imposée, suivant la méthode décrite pour le cas  $SU(2)$  au chapitre 3. Le cas de la technicouleur correspond à prendre les valeurs des constantes de basse énergie à l'ordre  $\mathcal{O}(p^4)$  obtenues en  $\chi$ PT. La valeur de la constante  $f$  apparaissant à  $\mathcal{O}(p^2)$  est en revanche supposée valoir 246 GeV. Cependant, une telle transposition de la QCD à une plus haute échelle semble expérimentalement exclue (voir l'annexe C).

D'autre part, la simple « juxtaposition » des deux secteurs est elle-même problématique: du point de vue logique, on ne peut pas considérer le secteur de brisure et celui de jauge séparément, puis simplement introduire les interactions entre les deux *via* l'identification des sources et des champs de jauge. En effet, les symétries permettront des opérateurs mélangeant les deux secteurs, et la LEET doit tenir compte de tels termes. En particulier, puisque l'introduction du champ de jauge  $U(1)_Y$  brise explicitement la symétrie custodiale, le lagrangien doit inclure tous les termes de ce type, par exemple ceux impliquant explicitement une matrice  $\tau^3$ : nous reviendrons sur ce point ci-dessous. De tels termes seront d'ailleurs nécessaires aux ordres supérieurs [BEM99]: la question est alors de formuler un développement donnant l'ordre auquel ces termes apparaissent, ce que nous ferons à l'aide des spurions dans la suite de ce chapitre.

Nous décrivons à présent les difficultés dans le cadre d'une LEET pour l'EWSB sans particule de Higgs physique, dans le cas où le couplage du secteur de brisure aux champs de jauge est introduit par une simple identification des sources avec les champs de Yang-Mills. Les seules règles de comptage à appliquer dans ce cas ont été discutées au chapitre 2. Les difficultés phénoménologiques apparaissent dès l'ordre des arbres: les symétries et le comptage de puissance permettent à l'ordre dominant diverses interactions supplémentaires par rapport au SM en arbres. Ces interactions indésirables correspondent à des opérateurs qui seraient *irrelevantes* dans le cas du SM et qui contiendraient des puissances des champs des Higgs élémentaires.

### 5.1.1 Règles de construction

On considère la matrice  $\Sigma \in SU(2)$  décrivant les trois GBs de la brisure  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \longrightarrow SU(2)_{L+R} \times U(1)_{B-L}$ , avec les propriétés de transformations sous  $L \in SU(2)_L$  et  $R \in SU(2)_R$

$$\Sigma \longmapsto L \Sigma R^\dagger. \quad (5.1)$$

Les transformations des doublets fermioniques sont <sup>1</sup>

$$\chi_L \longmapsto R e^{-i \frac{B-L}{2} \alpha^0} \chi_L, \quad (5.2)$$

$$\chi_R \longmapsto L e^{-i \frac{B-L}{2} \alpha^0} \chi_R. \quad (5.3)$$

Les sources se transforment selon

$$L_\mu \longmapsto {}^t L_\mu = L L_\mu L^\dagger + i L \partial_\mu L^\dagger, \quad (5.4)$$

$$R_\mu \longmapsto {}^t R_\mu = R R_\mu R^\dagger + i R \partial_\mu R^\dagger. \quad (5.5)$$

Les interactions sont introduites en identifiant sources et champs de jauge  $SU(2)_w \times U(1)_Y$  notés  $G_\mu^a$  et  $b_\mu^0$  selon

$$R_\mu^a = g G_\mu^a, \quad (5.6)$$

$$L_\mu^a = \delta^{a3} g' b_\mu^0 + S_\mu^a, \quad (5.7)$$

où les  $S_\mu^a$  sont des sources. Les propriétés de transformation des champs sont

$$G_\mu \longmapsto R G_\mu R^\dagger + \frac{i}{g} R \partial_\mu R^\dagger, \quad (5.8)$$

$$b_\mu^0 \longmapsto b_\mu^0 - \partial_\mu \alpha^0. \quad (5.9)$$

Dans la théorie effective, la règle d'introduction des couplages est la suivante: on écrit le lagrangien invariant sous  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ , et on identifie ensuite les connexions selon (5.6-5.7).

1. Noter la similitude avec (1.28-1.29). Bien que préjudiciable d'un point de vue mnémotechnique, cette notation pour les transformations  $L$  et  $R$  des GBs nous rappelle que celles-ci n'ont rien à voir avec la chiralité des fermions.

Après l'identification (5.7), on note à nouveau le parallèle entre les transformations de la matrice des GBs  $\Sigma$  et celles de la matrice  $\Phi^\dagger$  du SM (1.72).

### 5.1.2 Secteur bosonique

Avec les comptages de puissances déterminés au chapitre 2

$$f, \Sigma = \mathcal{O}(p^0), \quad (5.10)$$

$$\partial_\mu, D_\mu = \mathcal{O}(p^1), \quad (5.11)$$

$$L_\mu, R_\mu, S_\mu = \mathcal{O}(p^1), \quad (5.12)$$

$$G_\mu, b_\mu^0 = \mathcal{O}(p^0), \quad (5.13)$$

$$g, g' = \mathcal{O}(p^1), \quad (5.14)$$

on peut écrire les termes de plus bas ordre du lagrangien effectif dans le secteur bosonique. Celui-ci commence bien par l'ordre  $\mathcal{O}(p^2)$ , et l'on trouve

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2} \langle G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \rangle + \frac{f^2}{4} \langle D_\mu \Sigma^\dagger D^\mu \Sigma \rangle - \frac{1}{4} b_{\mu\nu}^0 b^{0\mu\nu}. \quad (5.15)$$

Rappelons à ce stade que la symétrie  $SU(2)_L$  est essentielle: sans elle, on ne demanderait l'invariance du lagrangien que sous le sous-groupe abélien de  $SU(2)_L$  correspondant à l'isospin droit  $U(1)_{T_{d3}}$ . Dans ce cas, on aurait dès l'ordre le plus bas  $\mathcal{O}(p^2)$  des corrections au paramètre  $T$ . En effet, les masses des  $W^\pm$  et du  $Z^0$  seraient indépendantes puisque l'on pourrait écrire l'équivalent de l'opérateur (1.122) [Lon80], qui ne donnera de masse qu'au  $Z^0$

$$\langle \Sigma^\dagger \tau^3 D_\mu \Sigma \rangle \langle \Sigma^\dagger \tau^3 D^\mu \Sigma \rangle = \mathcal{O}(p^2). \quad (5.16)$$

Ceci est la motivation originale pour demander la symétrie custodiale du secteur bosonique dans la limite  $g' \rightarrow 0$  ici réalisée par le groupe  $SU(2)_L$ . De plus, le terme suivant [HT90, PT92, EH92], donnant une contribution au paramètre  $S$ <sup>2</sup> serait également permis

$$b_{\mu\nu}^0 \langle \Sigma^\dagger \tau^3 \Sigma G^{\mu\nu} \rangle. \quad (5.17)$$

Si pour une raison donnée, de tels termes n'apparaissent que multipliés par  $g'$ , on récupérerait bien la symétrie custodiale dans la limite  $g' \rightarrow 0$ .

Dans la théorie effective basée sur les règles données à la section 5.1.1, seul le terme suivant est permis, qui apparaîtra à l'ordre  $\mathcal{O}(p^3)$

$$\langle \Sigma^\dagger L_{\mu\nu} \Sigma G^{\mu\nu} \rangle = \mathcal{O}(p^3). \quad (5.18)$$

Lorsque l'on effectue l'identification selon (5.7), on voit que ceci génère, en plus des termes de sources<sup>3</sup>, le terme (5.17), multiplié par  $g'$ , comme il se doit. Le résultat est donc le suivant: l'opérateur est relégué à l'ordre  $\mathcal{O}(p^3)$ , mais interviendra donc encore avant les corrections de boucles  $\mathcal{O}(p^4)$ . Cet opérateur donne une contribution au paramètre  $S$  dès l'ordre des arbres. Nous verrons dans la suite du présent chapitre que le développement en puissance des spurions permet de reléguer cet opérateur à l'ordre  $\mathcal{O}(p^4)$ .

Dans le développement chirale basé sur la symétrie  $SU(2)_w \times U(1)_Y$  tel qu'il a été présenté jusqu'ici, le statut de l'opérateur (5.16) n'est pas clair: nous seront donc naturellement conduits à introduire la brisure explicite de  $SU(2)_L$  vers  $U(1)_{T_{d3}}$  à l'aide de spurions à la section 5.2, permettant de compter les puissances des paramètres de brisure. Ceci constitue donc un autre rôle pour les spurions en plus de la simple identification entre les groupes  $SU(2)$  chiraux et les groupes de jauge, décrite à la section 4.1.2.

2. Nous avons déjà remarqué que l'opérateur correspondant dans le SM (1.121) donnait des contributions au paramètre  $S$ , voir (B.24). Voir aussi à ce sujet l'annexe C.

3. On peut également vérifier que l'opérateur (5.18) ne peut pas être divisé par une puissance de constante de couplage: les courants extraits par dérivée fonctionnelle seraient mal définis dans la limite  $(g, g') \rightarrow (0, 0)$ . Le raisonnement est analogue à celui de l'annexe D.1.

### 5.1.3 Fermions

Construisons maintenant les terme d'ordre le plus bas comportant les champs spinoriels (2.121)

$$\chi_L, \chi_R = \mathcal{O}(p^{1/2}). \quad (5.19)$$

On trouve dès l'ordre  $\mathcal{O}(p^1)$  des termes de Yukawa donnant une masse commune aux deux composantes du doublet

$$\overline{\chi_R} \Sigma \chi_L = \mathcal{O}(p^1). \quad (5.20)$$

Ceci présente immédiatement un danger pour le développement de la théorie effective: la formule de comptage de Weinberg (2.80) n'est plus respectée. On doit donc trouver une raison physique pour que ces masses soient protégées<sup>4</sup>. De nouveau, la symétrie  $SU(2)_L$  semble interdire l'opérateur suivant, qui générerait une différence de masse entre les deux composantes d'un doublet (par exemple  $m_t - m_b$ )

$$\overline{\chi_R} \tau^3 \Sigma \chi_L, \quad (5.21)$$

mais en réalité, un tel opérateur sera généré par les corrections radiatives. Il nous faudra recourir au développement en puissance des spurions pour trouver une règle fixant l'ordre auquel les opérateurs du type (5.16) et (5.21) vont apparaître.

Les termes cinétiques, quant-à-eux, sont comptabilisés comme  $\mathcal{O}(p^2)$  (2.119-2.120)

$$i \overline{\chi_L} \gamma^\mu D_\mu \chi_L = \mathcal{O}(p^2), \quad (5.22)$$

$$i \overline{\chi_R} \gamma^\mu D_\mu \chi_R = \mathcal{O}(p^2). \quad (5.23)$$

Ils donnent des couplages des fermions aux bosons vecteurs identiques à ceux du SM, étant données les charges des fermions sous les transformations (5.2-5.3) et les identifications (5.6-5.7). En revanche, les symétries de la théorie permettent d'écrire les opérateurs suivants [ABCH85, PZ90] au même ordre

$$i \overline{\chi_L} \gamma^\mu (\Sigma^\dagger D_\mu \Sigma) \chi_L = \mathcal{O}(p^2), \quad (5.24)$$

$$i \overline{\chi_R} \gamma^\mu (\Sigma D_\mu \Sigma^\dagger) \chi_R = \mathcal{O}(p^2). \quad (5.25)$$

On peut voir que ces termes contiennent des interactions entre les fermions et les champs vectoriels contenus dans la dérivée covariante. Ces termes, qui seront présents dans le lagrangien effectif, multipliés par des constantes libres, violeront donc l'universalité des couplages. On constate de plus que les fermions de chiralité droite vont pouvoir coupler aux champs de jauge  $SU(2)$  dès cet ordre. Ceci est en conflit avec les expériences. Rappelons que, dans le cas du SM, des termes similaires peuvent être construits, mais seront de dimensions six (voir (1.123-1.124)).

A l'ordre  $\mathcal{O}(p^1)$ , on peut construire un opérateur effectif donnant des masses de Majorana aux  $\nu_L$ , ce qui constitue vraisemblablement la difficulté la plus flagrante pour cette théorie effective sans Higgs. En effet, on peut écrire l'invariant suivant pour le cas où le doublet  $\chi_L$  est un doublet de leptons ( $B - L = -1$ )

$$(\overline{\chi_{Li}})^c \Sigma^\dagger \tau^- \Sigma \chi_{Lj} = \mathcal{O}(p^1). \quad (5.26)$$

Cet opérateur est invariant sous  $SU(2)_w \times U(1)_Y$ , bien qu'il viole la symétrie custodiale  $SU(2)_L$  ainsi que le nombre leptonique par deux unités (il conserve le nombre baryonique). Cet opérateur est la version sans Higgs physique correspondant à l'opérateur (1.119) dans le cas du SM. Un tel opérateur apparaissant à l'ordre  $\mathcal{O}(p^1)$  et de dimension physique égale à trois introduirait une violation du nombre leptonique à un niveau inacceptable (dans le cas du SM, l'opérateur (1.119) est de dimension physique cinq puisque la matrice  $\Phi$  a une dimension physique égale à un, et l'opérateur est donc supprimé par une échelle). Nous insistons sur le comptage de puissances et de dimensions pour cet opérateur car il constitue la difficulté la plus sévère pour la LEET.

4. Comme déjà mentionné à la section 2.4.2.2, et comme nous le verrons au chapitre 6, l'origine du problème est la suivante: les champs fermioniques que nous considérons ici correspondent en fait à des fermions composites et non pas élémentaires. Dans ce cas, on peut par exemple supposer que leurs masses sont faibles en relation avec leur participation au raccordement des anomalies [tH79a].

### 5.1.4 Discussion

On voit que la formulation de la LEET pour l'EWSB sans particule de Higgs utilisant uniquement le comptage chirale défini au chapitre 2 est insuffisante pour rendre compte de la suppression, observée expérimentalement, de certains couplages. Le fait de considérer comme petites tout un ensemble de constantes apparaissant devant des opérateurs mérite une explication basée sur des symétries pour espérer prétendre à un début de compréhension. Ici, un tel choix serait arbitraire, contrairement au cas du SM, où les opérateurs correspondants sont *irrelevantes* du fait de la dimension physique du champ de Higgs élémentaire (voir section 1.6.2). De plus, le comptage de l'ordre auquel certains effets apparaissent est malaisé. En particulier, la brisure d'isospin faible est un tel effet: si l'on veut appliquer la LEET au secteur électrofaible, les différences de masses entre composantes d'un doublet fermionique devraient être comptabilisés comme étant du même ordre que la masse moyenne. Ceci n'est pas le cas dans le présent formalisme.

La situation est donc semblable à celle mentionnée à l'annexe F pour le cas des modèles *moose*, et résolue par le formalisme des spurions au chapitre 4: on a des couplages indésirables dès l'ordre le plus bas, que l'on souhaite repousser à des ordres supérieurs de façon cohérente. Ici, on souhaite traiter comme étant d'ordres supérieurs l'opérateur (5.26) violant le nombre leptonique par deux unités, les couplages non-standard des fermions aux champs vecteurs (5.24-5.25), l'opérateur (5.18) correspondant à une valeur non-nulle du paramètre  $S$  en arbres, l'opérateur (5.16) contribuant au paramètre  $S$ , ainsi que les termes de Yukawa (5.20). Pour réaliser cette suppression, le formalisme des spurions (introduit au chapitre 4) fait appel à une plus grande symétrie. Nous appliquons à présent ce formalisme au cas de l'EWSB sans Higgs. Ceci permettra de construire le lagrangien effectif décrivant ensemble les deux secteurs (composite et élémentaire) en introduisant leurs interactions *via* des contraintes sur les spurions.

## 5.2 Couplage entre le secteur de brisure et le secteur élémentaire *via* des spurions

Nous avons vu à la section 5.1 que l'approche la plus simple, basée uniquement sur la symétrie  $SU(2) \times U(1)$  rencontrait des difficultés phénoménologiques dès l'ordre dominant, ainsi que des problèmes plus théoriques du point de vue de sa formulation. Suite à cette discussion, nous introduisons le couplage entre le secteur de brisure (que nous appellerons « techni-théorie »<sup>5</sup>) et le secteur de jauge (champs de Yang-Mills et fermions élémentaires: quarks et leptons) *via* les spurions, étendant la formulation du chapitre 4.

L'introduction des couplages *via* les spurions utilise un plus grand groupe de symétrie, appelée  $S_{\text{naturel}}$ , correspondant à la situation où le secteur de brisure et le secteur élémentaire sont découplés. Ceci traduit le fait que les deux secteurs sont distincts, puisque l'on introduit le couplage entre les deux de façon perturbative. Précisons néanmoins que, la procédure étant directement définie au niveau de la théorie effective, qui est notre seul outil de travail, il paraît difficile de la traduire en un critère sur la théorie sous-jacente: la LEET ne se préoccupe pas de l'origine dynamique des spurions et des contraintes qui leurs sont appliquées.

La théorie effective pour l'EWSB avec un contenu minimal en particules est donc basée sur le *moose* linéaire avec  $K=0$ , qui possède une symétrie  $SU(2)_L \times SU(2)_R \longrightarrow SU(2)_{L+R}$ . Nous couplons des champs de Yang-Mills  $SU(2)_{G_0} \times SU(2)_{G_1}$  et une source de la symétrie  $U(1)_{B-L}$ . Le groupe de transformations de la symétrie naturelle sera donc

$$S_{\text{naturel}} = SU(2)_{G_0} \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_{G_1} \times U(1)_{B-L}. \quad (5.27)$$

Il sera réduit vers

$$S_{\text{réduit}} = SU(2)_w \times U(1)_Y, \quad (5.28)$$

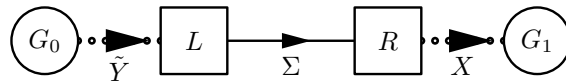
en utilisant des spurions et les contraintes qui leur seront appliquées.

<sup>5</sup> La dénomination « techni-théorie » est choisie pour rappeler la parenté avec le premier modèle de ce type (la technicouleur). L'idée est que la technicouleur n'est qu'un exemple de techni-théorie.

Les détails de cette réduction de symétrie, ainsi que les premières conséquences physiques, sont le sujet de cette section. La discussion est sensiblement améliorée par rapport à [HS04b], qui traite également des premières extensions du cas minimal: nous ne considérons pas de tels cas dans le présent manuscrit.

### 5.2.1 Spurion complexe et isospin droit

Nous décrivons le couplage des trois GBs de la brisure  $SU(2)_L \times SU(2)_R \longrightarrow SU(2)_{L+R}$  aux champs de jauge de  $SU(2)_{G_0} \times SU(2)_{G_1}$ , comme indiqué sur la figure 5.1. Le spurion  $X$  et la contrainte de covariance constante qui lui sera appliquée vont réaliser le couplage de champs de Yang-Mills  $SU(2)_{G_1}$  aux GBs, identifiant les sources et les champs dynamiques. Le groupe d'invariance  $SU(2)_{G_1+R}$  de la solution des contraintes correspondra au groupe  $SU(2)_w$  des interactions faibles. Le spurion  $\tilde{Y}$  permet de sélectionner la connexion du sous-groupe abélien diagonal de  $SU(2)_L \times SU(2)_{G_0}$  comme champ de jauge dynamique. Les transformations correspondantes sont celles de l'isospin droit dénotée  $U(1)_{T_{d_3}}$ <sup>6</sup>, qui seront ensuite identifiées à la section 5.2.3 avec celles du groupe  $U(1)_{B-L}$  pour donner les transformation de l'hypercharge  $U(1)_Y$  (ceci nécessitera un spurion supplémentaire dénoté  $\phi$ ).



**Figure 5.1.** Couplage de champs de jauge  $SU(2) \times SU(2)$  à un triplet de GBs, *via* des spurions.

Les transformations des champs de Yang-Mills sont données par

$$G_{0\mu} \longmapsto G_0 G_{0\mu} G_0^\dagger + \frac{i}{g_0} G_0 \partial_\mu G_0^\dagger, \quad (5.29)$$

$$G_{1\mu} \longmapsto G_1 G_{1\mu} G_1^\dagger + \frac{i}{g_1} G_1 \partial_\mu G_1^\dagger, \quad (5.30)$$

les transformations correspondantes  $(G_0, G_1) \in SU(2)_{G_0} \times SU(2)_{G_1}$  commutant avec la symétrie chirale  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ . La sélection du groupe de jauge dynamique  $SU(2)_w \times U(1)_{T_{d_3}}$  est effectuée par des contraintes. Celles-ci nécessitent d'introduire le spurion  $X$  satisfaisant à la condition de réalité

$$X_c = X. \quad (5.31)$$

On introduit également le spurion  $\tilde{Y}$ , qui est une matrice  $2 \times 2$ . Les propriétés de transformation des deux spurions, résumées par la figure 5.1, sont

$$X \longmapsto R X G_1^\dagger, \quad (5.32)$$

$$\tilde{Y} \longmapsto G_0 \tilde{Y} L^\dagger. \quad (5.33)$$

Notons que le spurion  $\tilde{Y}$  et son conjugué  $\tilde{Y}_c \equiv \tau^2 \tilde{Y}^* \tau^2$  sont distincts, mais se transforment de manière identique

$$\tilde{Y}_c \longmapsto G_0 \tilde{Y}_c L^\dagger. \quad (5.34)$$

Notons que, pour toute matrice  $2 \times 2$ , on a la relation

$$\tilde{Y} \tilde{Y}_c^\dagger = \det \tilde{Y} \mathbb{1}. \quad (5.35)$$

On constate bien que les spurions relient les deux secteurs (composite et élémentaire), puisque dans les équations (5.32-5.33),  $G_0$  et  $G_1$  sont les transformations de jauge apparaissant dans (5.29-5.30), et les transformation  $L, R$  sont celles agissant sur les GBs selon

$$\Sigma \longmapsto L \Sigma R^\dagger. \quad (5.36)$$

<sup>6</sup> La notation « d » pour « isospin droit » fait ici référence à la chiralité des fermions auxquels le champ abélien sera couplé, et non pas au groupe  $SU(2)_R$ .

On utilisera le même comptage qu'au chapitre 4 pour les spurions

$$X, \tilde{Y} = \mathcal{O}(\epsilon). \quad (5.37)$$

Les termes invariants d'ordre  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0)$  sont les suivants

$$\mathcal{L}_{\text{bosons}}^{(2,0)} = \frac{f^2}{4} \langle D_\mu \Sigma D^\mu \Sigma^\dagger \rangle - \frac{1}{2} \langle G_{1\mu\nu} G_1^{\mu\nu} \rangle - \frac{1}{2} \langle G_{0\mu\nu} G_0^{\mu\nu} \rangle, \quad (5.38)$$

où la dérivée covariante  $D_\mu \Sigma$  implique les sources  $L_\mu$  et  $R_\mu$  d'après (5.36), et non pas les champs dynamiques  $G_{0\mu}, G_{1\mu}$

$$D_\mu \Sigma = \partial_\mu \Sigma - i L_\mu \Sigma + i \Sigma R_\mu. \quad (5.39)$$

Rappelons finalement les transformations des sources

$$L_\mu \mapsto L L_\mu L^\dagger + i L \partial_\mu L^\dagger, \quad (5.40)$$

$$R_\mu \mapsto R R_\mu R^\dagger + i R \partial_\mu R^\dagger. \quad (5.41)$$

Nous suivons à présent la logique du chapitre 4. La contrainte de constance covariante est imposée sur les spurions

$$D_\mu X = \partial_\mu X - i R_\mu X + i g_1 X G_{1\mu} = 0, \quad (5.42)$$

$$D_\mu \tilde{Y} = \partial_\mu \tilde{Y} - i g_0 G_{0\mu} \tilde{Y} + i \tilde{Y} L_\mu = 0, \quad (5.43)$$

ce qui introduira les interactions entre GBs et champs de jauge.

### Solution des contraintes

On peut résoudre les contraintes de la manière suivante: en appliquant des transformations appropriées, on se place dans une jauge où  $X$  s'écrit

$$X \stackrel{\text{j. s.}}{=} \xi \mathbb{1}_{2 \times 2}. \quad (5.44)$$

Au lieu d'utiliser  $\tilde{Y}$  et  $\tilde{Y}_c$ , on pourra, grâce aux contraintes, travailler dans une base  $(Y_u, Y_d)$  avec

$$Y_d = Y_{uc}, \quad (5.45)$$

et <sup>7</sup>

$$Y_u Y_{uc}^\dagger = 0, \quad (5.46)$$

où  $Y_u, Y_d$  se transforment de la même manière que  $\tilde{Y}$  (5.33). Ce sont les deux combinaisons linéairement indépendantes solution de (5.43) qui vérifient (5.46). On pourra alors exprimer le spurion original  $\tilde{Y}$  selon

$$\tilde{Y} = e^{i\varphi_Y} (\cos \alpha_Y Y_u + \sin \alpha_Y Y_d), \quad (5.47)$$

où, du fait la contrainte (5.43),  $\varphi_Y$  et  $\alpha_Y$  sont des constantes (réelles). On se placera dans la jauge standard, dans laquelle

$$Y_u \stackrel{\text{j. s.}}{=} \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

et donc (en accord avec (5.45))

$$Y_d \stackrel{\text{j. s.}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}. \quad (5.49)$$

On voit que le comptage de puissance (5.37) équivaut à un comptage pour les constantes  $\xi$  et  $\eta$ , donné par

$$\xi, \eta = \mathcal{O}(\epsilon). \quad (5.50)$$

---

7. Rappelons la relation (5.35).



De plus,  $\tilde{Y}$  introduira la brisure d'isospin faible, étant diagonal mais non pas proportionnel à l'unité d'après (5.47-5.48) <sup>8</sup>. La résolution des contraintes (5.42-5.43) dans la jauge standard définie par (5.44) et (5.48) donnera de plus

$$R_\mu \stackrel{\text{j. s.}}{=} g_1 G_{1\mu}, \quad (5.51)$$

$$L_\mu^{1,2} \stackrel{\text{j. s.}}{=} G_{0\mu}^{1,2} \stackrel{\text{j. s.}}{=} 0, \quad (5.52)$$

$$L_\mu^3 \stackrel{\text{j. s.}}{=} g_0 G_{0\mu}^3. \quad (5.53)$$

On constate que la connexion  $R_\mu$  et le champ de jauge  $g_1 G_{1\mu}$  sont identifiés du fait de la contrainte sur le spurion réel  $X$ : on a ainsi réduit la symétrie  $\text{SU}(2)_R \times \text{SU}(2)_{G_1}$  à son sous-groupe  $\text{SU}(2)_{R+G_1}$  diagonal, qui est le groupe des interactions faibles  $\text{SU}(2)_w$ . Le spurion complexe  $\tilde{Y}$  est responsable du choix du sous-groupe abélien diagonal de  $\text{SU}(2)_{G_0} \times \text{SU}(2)_L$  qui correspond à un champ dynamique, c'est-à-dire l'isospin droit  $\text{U}(1)_{T_{d3}}$ : l'identification des connexions concerne uniquement la troisième composante, les autres étant nulles.

### Démonstration

Pour ce qui est de la contrainte sur le spurion  $X$ , on procède comme à la section 4.1.2.1: on utilise tout d'abord la décomposition

$$X = \xi U, \quad (5.54)$$

avec  $U \in \text{SU}(2)$ . On montre que la contrainte (5.42) implique, sans choisir de jauge

$$\partial_\mu \xi = 0. \quad (5.55)$$

Une transformation  $\text{SU}(2)_{R_1}$  définie par

$$R_1 = U^\dagger, \quad (5.56)$$

permet d'obtenir le résultat annoncé (5.44) ainsi que (5.51), après écriture explicite de la contrainte composante par composante. Notons que la jauge définie par (5.44) est fixée à une transformation de jauge  $\text{SU}(2)_{G_1+R}$  près, qui reste donc libre. Celle-ci sera plus tard identifiée avec le groupe faible  $\text{SU}(2)_w$ . La réduction de symétrie effectuée grâce au spurion  $X$  est schématisée au tableau 5.1.

$$\begin{array}{c} \text{SU}(2)_R \times \text{SU}(2)_{G_1} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ X \\ \downarrow \\ \text{SU}(2)_w \end{array}$$

**Tableau 5.1.** Réduction de symétrie opérée par le spurion  $X$ .

Concernant le spurion  $\tilde{Y}$ , on utilise la décomposition suivante, valable pour une matrice  $2 \times 2$  générique

$$\tilde{Y} = e^{i\varphi_Y} G_Y^\dagger D_Y L_Y, \quad (5.57)$$

où  $\varphi_Y$  est une fonction réelle et  $G_Y, L_Y$  sont des éléments de  $\text{SU}(2)$ .  $D_Y$  est diagonale et réelle. Puisque la matrice  $\tau^3$  commute avec  $D_Y$ , on voit que le couple  $(G_Y, L_Y)$  n'est unique qu'à une transformation  $\text{U}(1)$  diagonale près, soit

$$(G_Y, L_Y) \in \frac{\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)}{\text{U}(1)_{\tau^3, \text{diagonal}}}. \quad (5.58)$$

<sup>8</sup>. De telles matrices diagonales ont été utilisées dans la littérature (voir [AHCG01b] entre autres). L'idée y était également de sélectionner le groupe de jauge, mais la formulation covariante, permettant une formulation précise et un développement systématique, en était absente.

On peut vérifier que le nombre de paramètres indépendants dans le membre de droite de (5.57) est bien huit. Utilisant la contrainte sur  $\tilde{Y}$  (5.43), on peut écrire sans aucun choix de jauge

$$\partial_\mu \langle \tilde{Y} \tilde{Y}^\dagger \rangle = \partial_\mu (\text{tr } D_Y^2) = 0, \quad (5.59)$$

$$D_\mu (\tilde{Y} \tilde{Y}_c^\dagger) = \partial_\mu (e^{2i\varphi_Y} \det D_Y) \mathbb{1}_{2 \times 2} = 0, \quad (5.60)$$

ce qui implique, sans avoir eu à choisir de jauge

$$\partial_\mu \varphi_Y = 0, \quad (5.61)$$

$$\partial_\mu D_Y = 0. \quad (5.62)$$

On peut donc écrire  $\tilde{Y}$  comme combinaison linéaire avec coefficients constants (ce qui constitue le résultat (5.47)) de

$$Y_u = G_Y^\dagger \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L_Y, \quad (5.63)$$

$$Y_d = G_Y^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix} L_Y, \quad (5.64)$$

avec, indépendamment de la jauge

$$\partial_\mu \eta = 0. \quad (5.65)$$

On vérifie que  $Y_u$  et  $Y_d$  donnés par (5.63-5.64) représentent les deux solutions linéairement indépendantes de (5.43) et (5.46).

Comme  $\tilde{Y}_c$  se transforme de façon identique à  $\tilde{Y}$ , on peut construire des termes dans le lagrangien impliquant des combinaisons linéaires à coefficients arbitraires constants de  $\tilde{Y}$  et  $\tilde{Y}_c$ . Une écriture équivalente utilise des combinaisons linéaires de  $Y_u$  et  $Y_d$ : c'est celle que nous choisirons par la suite. Notons que ceci pourra être utilisé au niveau du lagrangien invariant sous  $S_{\text{naturel}}$ , puisque nous n'avons pas eu à choisir une jauge pour obtenir ce résultat. La suite de la méthode utilise en revanche un choix de jauge particulier, que nous appellerons la jauge standard. La contrainte sur  $\tilde{Y}$  (5.43) implique, d'après (5.45) et (5.47)

$$D_\mu Y_u = 0. \quad (5.66)$$

Appliquant les transformations suivantes de  $\text{SU}(2)_{G_0}$  et  $\text{SU}(2)_L$

$$G_0 = e^{-if \frac{\tau^3}{2}} G_Y, \quad (5.67)$$

$$L = e^{-if \frac{\tau^3}{2}} L_Y, \quad (5.68)$$

avec une fonction  $f$  arbitraire on obtient, dans cette jauge standard

$$Y_u \stackrel{\text{j. s.}}{=} \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.69)$$

et ce indépendamment de la fonction de jauge  $f$ , qui reste donc libre. On utilise ensuite les équations suivantes, qui découlent de (5.66)

$$D_\mu (Y_u Y_u^\dagger) = 0, \quad (5.70)$$

$$D_\mu (Y_u^\dagger Y_u) = 0.$$

Écrivant ces équations composante par composante dans la jauge standard où (5.69) est valable, on obtient les résultats (5.52), dans le cas général  $\eta \neq 0$ . À partir de l'équation (5.66) écrite dans cette même jauge standard, on obtient l'identification (5.53).

Notons que l'on a utilisé une transformation  $G_0$  (5.67) pour atteindre la jauge standard dans laquelle (5.69) est valable: le champ de jauge  $G_{0\mu}^a$  est alors aligné selon la troisième direction. Cependant, il reste un sous-groupe abélien qui n'est pas contraint: parmi les six fonctions de jauge initiales du groupe  $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_{G_0}$ , la transformation  $f$  reste libre. Nous utiliserons ainsi la notation suivante pour le champ dynamique  $\text{U}(1)$  correspondant

$$G_{0\mu}^3 \stackrel{\text{j. s.}}{=} b_\mu^0. \quad (5.71)$$

Pour ce champ de jauge abélien, le tenseur de Faraday est donné par

$$b_{\mu\nu}^0 = \partial_\mu b_\nu^0 - \partial_\nu b_\mu^0, \quad (5.72)$$

et la transformation de jauge par

$$b_\mu^0 \mapsto b_\mu^0 - \frac{1}{g_0} \partial_\mu f, \quad (5.73)$$

qui est bien compatible avec les contraintes. Nous avons donc trouvé que la contrainte appliquée au spurion complexe  $\tilde{Y}$ , lequel contient huit fonctions réelles, réduit l'espace des connexions à un plus petit sous-espace que dans le cas d'un spurion réel contenant quatre fonctions réelles. Ceci est logique, puisqu'un nombre de paramètres indépendants plus grand pour le spurion entraîne davantage de relations non-triviales découlant de la contrainte de covariance constante. Dans les deux cas, les combinaisons linéaires du spurion et de son conjugué peuvent être écrites, dans la jauge standard, comme combinaison linéaire de matrices n'impliquant qu'un paramètre libre, compatible comme d'ordre  $O(\epsilon)$ . La réduction de symétrie opérée par le spurion  $\tilde{Y}$  et la contrainte associée est résumée par le tableau 5.2.

$$\begin{array}{c} \text{SU}(2)_{G_0} \times \text{SU}(2)_L \\ \downarrow \\ \tilde{Y} \\ \downarrow \\ \text{U}(1)_{T_{d3}} \end{array}$$

**Tableau 5.2.** Réduction de symétrie due au spurion  $\tilde{Y}$ .

Injectant la solution des contraintes dans le lagrangien (5.38), on obtient

$$\mathcal{L}_{\text{bosons}}^{(2,0)} \stackrel{\text{j. s.}}{=} \frac{f^2}{4} \langle \nabla_\mu \Sigma \nabla^\mu \Sigma^\dagger \rangle - \frac{1}{2} \langle G_{1\mu\nu} G_1^{\mu\nu} \rangle - \frac{1}{4} b_{\mu\nu}^0 b^{0\mu\nu}, \quad (5.74)$$

où la définition suivante a été employée

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \Sigma &\equiv D_\mu \Sigma|_{\text{j. s.}} \\ &= \partial_\mu \Sigma - i g_0 b_\mu^0 \frac{\tau^3}{2} \Sigma + i g_1 \Sigma G_{1\mu}. \end{aligned} \quad (5.75)$$

### 5.2.2 Bosons

Jusqu'à présent, nous avons uniquement introduit les champs bosoniques. Nous donnons à présent plus de détails sur ce secteur, afin d'établir le résultat suivant: à l'ordre dominant  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0)$ , les interactions sont identiques à celles du SM, excepté pour ce qui est de l'absence de la particule de Higgs. A cette fin, nous travaillons avec les champs physiques, utilisant des redéfinitions des champs similaires à celles de la section 4.1.3: l'idée est à nouveau de définir des objets invariants sous la symétrie  $\text{SU}(2)_R$ . Ainsi, on effectue un changement de variable pour les sources  $R_\mu$  vers des champs vectoriels  $W_\mu$ . Pour simplifier les écritures et faire apparaître les interactions entre champs physiques, nous nous plaçons dans la jauge standard, et donnons les redéfinitions des champs dans cette jauge. Les champs obtenus ne seront pas invariants sous toutes les transformations de jauge, mais porteront une charge abélienne. En revanche, ils sont invariants sous les transformations  $\text{SU}(2)_{G_1}$  (et  $\text{SU}(2)_R$ , ces transformations étant identifiées dans la jauge standard). Pour les champs  $W_\mu$  on écrit

$$W_\mu \stackrel{\text{j. s.}}{=} \frac{i}{g_1} \Sigma \nabla_\mu \Sigma^\dagger. \quad (5.76)$$

De même que pour le cas des *mooses* du chapitre 4, le lagrangien effectif (5.74), lorsqu'il est écrit en termes des variables  $W_\mu$  au lieu des  $R_\mu$ , ne dépend plus de  $\Sigma$ <sup>9</sup>: c'est le mécanisme de Higgs. Ces définitions permettent d'éliminer les GBs du lagrangien. Cette réécriture suffit à diagonaliser les termes quadratiques pour les bosons vecteurs chargés définis par

$$W_\mu^\pm \stackrel{\text{j. s.}}{=} \frac{i\sqrt{2}}{g_1} \langle \tau^\mp \Sigma \nabla_\mu \Sigma^\dagger \rangle. \quad (5.77)$$

Pour ce qui est des champs neutres en revanche, il reste encore à traiter le mélange: la matrice de masse dans la base  $(b_\mu^0, W_\mu^3)$  est diagonale, puisqu'elle prend la forme

$$\frac{g_1^2 f^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.78)$$

En revanche, la matrice des termes cinétiques est donnée par

$$-\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{g_0}{g_1}\right)^2 & \frac{g_0}{g_1} \\ \frac{g_0}{g_1} & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.79)$$

On utilise donc une transformation triangulaire, selon

$$A_\mu \stackrel{\text{j. s.}}{=} s \frac{i}{g_1} \langle \tau^3 \Sigma \nabla_\mu \Sigma^\dagger \rangle + \frac{1}{c} b_\mu^0, \quad (5.80)$$

$$Z_\mu \stackrel{\text{j. s.}}{=} c \frac{i}{g_1} \langle \tau^3 \Sigma \nabla_\mu \Sigma^\dagger \rangle, \quad (5.81)$$

avec

$$c = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_0^2}}, \quad (5.82)$$

$$s = \sqrt{1 - c^2}. \quad (5.83)$$

Si l'on souhaite comparer à la diagonalisation utilisée dans le SM, on doit suivre la méthode qui serait utilisée dans ce cas pour définir la jauge unitaire: on fixerait dans ce cas à zéro les champs  $\pi^a = 0$  pour  $a = 1, 2, 3$  dans

$$\Sigma = e^{-i \frac{\pi^a \tau^a}{f}}. \quad (5.84)$$

Ceci correspond à effectuer le remplacement  $\Sigma \rightarrow \mathbb{1}_{2 \times 2}$  dans les définitions ci-dessus (5.80-5.81) pour obtenir

$$A_\mu|_{\pi^a=0} \stackrel{\text{j. s.}}{=} c b_\mu^0 + s G_{1\mu}^3, \quad (5.85)$$

$$Z_\mu|_{\pi^a=0} \stackrel{\text{j. s.}}{=} -s b_\mu^0 + c G_{1\mu}^3. \quad (5.86)$$

On reconnaît bien les formules utilisées dans le cas du SM, moyennant les remplacements  $g_0 \rightarrow g'$  et  $g_1 \rightarrow g$ . La charge électrique s'exprime également comme attendu

$$e = \frac{g_0 g_1}{\sqrt{g_0^2 + g_1^2}}, \quad (5.87)$$

d'après les lois de transformation des champs lorsque l'on applique une transformation de jauge  $f$  qui est toujours libre, même dans la jauge standard

$$W_\mu^\pm \mapsto e^{\mp i f} W_\mu^\pm, \quad (5.88)$$

$$Z_\mu \mapsto Z_\mu, \quad (5.89)$$

$$A_\mu \mapsto A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu f. \quad (5.90)$$

Par ailleurs, les termes cinétiques pour les GBs donnent directement les masses des bosons vecteurs selon

$$\frac{f^2}{4} \langle \nabla_\mu \Sigma \nabla^\mu \Sigma^\dagger \rangle \stackrel{\text{j. s.}}{=} M_W^2 \langle W_\mu^+ W_\mu^- \rangle + \frac{1}{2} M_Z^2 \langle Z_\mu Z^\mu \rangle, \quad (5.91)$$

9. Comme déjà évoqué, la disparition des modes de Goldstone du spectre n'est plus garantie en présence d'anomalies. Ceci sera étudié au chapitre 6.

avec à nouveau des définitions identiques à celles du SM

$$M_W^2 = \frac{g_1^2}{4} f^2, \quad (5.92)$$

$$M_Z^2 = \frac{g_1^2 + g_0^2}{4} f^2. \quad (5.93)$$

Une étude détaillée des interactions contenues dans le lagrangien (5.74) montre alors que les interactions entre bosons vecteurs à cet ordre sont identiques à celles décrites pour le SM en arbres à la section 1.2.2. Nous ne reproduisons donc pas les expressions des interactions composante par composante ici, mais mentionnons le sort des opérateurs indésirables. Les termes qui donneraient des contributions au paramètre  $S$  en arbres, nécessitant une modification de la diagonalisation pour les champs vectoriels neutres (5.80-5.81) sont absents à cet ordre. Ils sont donnés par <sup>10</sup>

$$\langle L_{\mu\nu} \Sigma R^{\mu\nu} \Sigma^\dagger \rangle = \mathcal{O}(p^4 \epsilon^0), \quad (5.94)$$

$$\langle L_{\mu\nu} \Sigma X G_1^{\mu\nu} X^\dagger \Sigma^\dagger \rangle = \mathcal{O}(p^3 \epsilon^2), \quad (5.95)$$

$$\langle G_{0\mu\nu} Y_{u,d} \Sigma R^{\mu\nu} \Sigma^\dagger Y_{u,d}^\dagger \rangle = \mathcal{O}(p^3 \epsilon^2), \quad (5.96)$$

$$\langle G_{0\mu\nu} Y_{u,d} \Sigma X G_1^{\mu\nu} X^\dagger \Sigma^\dagger Y_{u,d}^\dagger \rangle = \mathcal{O}(p^2 \epsilon^4). \quad (5.97)$$

Mentionnons également que les opérateurs

$$\langle Y_{u,d}^\dagger Y_{u,d} \Sigma D_\mu \Sigma^\dagger \rangle \langle Y_{u,d}^\dagger Y_{u,d} \Sigma D^\mu \Sigma^\dagger \rangle = \mathcal{O}(p^2 \epsilon^4), \quad (5.98)$$

donnant une contribution en arbres au paramètre  $T$  (comparer avec (5.16) et (1.122)), qui sont également supprimés par des puissances des spurions. Nous verrons plus tard (section 5.2.5) que, si l'on impose le lien le plus simple suggéré entre le comptage spurionique et celui en puissance des impulsions, on obtient  $\epsilon = \mathcal{O}(p^{1/2})$ . Si l'on utilise cette relation, toutes les opérateurs ci-dessus (5.94-5.98) apparaîtront alors à l'ordre  $\mathcal{O}(p^4)$ , au même niveau que les contributions à une boucle. Dans ce formalisme de spurions, les corrections au paramètre  $S$  sont donc naturellement plus petites que dans l'approche basée uniquement sur la symétrie  $SU(2) \times U(1)$  (voir (5.18)): en particulier, il ne semble pas possible de discuter les paramètres  $S$  et  $T$  indépendamment des corrections de boucles.

Dans cette section, nous avons vu comment le spurion complexe  $\tilde{Y}$  permettait d'introduire la brisure de l'isospin faible: la motivation initiale pour introduire les spurions était précisément de réduire la symétrie et l'espace des configurations de jauge. D'autre part, dans la jauge standard utilisée pour résoudre les contraintes, les spurions se réduisent à des constantes, introduisant ainsi la brisure explicite d'isospin, indépendamment de la constante de couplage  $g_0$  <sup>11</sup>, en plus de la brisure due à la valeur non-nulle de cette constante (la nécessité d'une distinction entre ces effets a déjà été mentionnée par les auteurs de [BEM99]: le fait que cette brisure implique des spurions permet de résoudre les questions relatives à la prise en compte des termes du type de (5.16) et (5.21), en fixant l'ordre auquel ils apparaissent dans le développement).

### 5.2.3 Fermions et symétrie $U(1)_{B-L}$

La réduction de symétrie, décrite à la section 5.2.1, du groupe  $SU(2)_{G_0} \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_{G_1}$  utilisant un spurion réel  $X$  et un spurion complexe  $\tilde{Y}$  nous a permis d'obtenir la symétrie  $U(1)_{T_{d3}} \times SU(2)_w$  qui est dynamique. Nous avons déjà mentionné que le groupe de symétrie  $S_{\text{naturel}}$  (5.27) comportait également un sous-groupe  $U(1)_{B-L}$ . Cette symétrie abélienne entre en jeu lorsque l'on considère les fermions, c'est pourquoi nous l'introduisons dans cette section. Nous décrivons à présent la réduction de symétrie du groupe  $SU(2)_w \times U(1)_{T_{d3}} \times U(1)_{B-L}$  vers le groupe  $SU(2)_w \times U(1)_Y$ , utilisant un autre spurion  $\phi$ , qui interviendra pour décrire la violation de  $B-L$ .

10. Comparer en particulier avec (5.18), (5.17) et (1.121).

11. Un certain lien entre les deux est donné par le comptage relatif  $\epsilon = \mathcal{O}(p^{1/2})$  suggéré entre spurions et constantes de couplages ( $g_0$  et  $g_1$ ).

On dénote la connexion correspondant aux transformations  $U(1)_{B-L}$  par  $B_\mu^0$ , dont la transformation est donnée par

$$B_\mu^0 \mapsto B_\mu^0 - \partial_\mu \alpha^0. \quad (5.99)$$

A ce point,  $B_\mu^0$  n'est qu'une source externe, au même titre que  $L_\mu$  et  $R_\mu$ . Le comptage de puissance approprié

$$B_\mu^0 = \mathcal{O}(p^1), \quad (5.100)$$

a été donné à la section 2.3.1.1. Nous considérons des fermions élémentaires décrits par des doublets de spineurs de Dirac, et leurs projections de chiralités définies

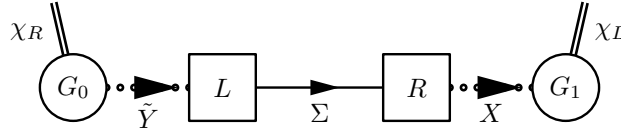
$$\chi_{L,R} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \chi. \quad (5.101)$$

Les fermions élémentaires sont chargés sous les transformations de Yang-Mills élémentaires  $SU(2)_{G_0}$  et  $SU(2)_{G_1}$ . Leurs propriétés de transformations sous le groupe  $S_{\text{naturel}}$  sont en effet les suivantes <sup>12</sup>

$$\chi_L \mapsto G_1 e^{-i \frac{B-L}{2} \alpha^0} \chi_L, \quad (5.102)$$

$$\chi_R \mapsto G_0 e^{-i \frac{B-L}{2} \alpha^0} \chi_R, \quad (5.103)$$

Toutes les transformations non-abéliennes des divers champs sont schématisées à la figure 5.2.



**Figure 5.2.** Introduction de fermions dans le modèle de la section 5.2.1.

Une autre possibilité serait de considérer des fermions se transformant sous  $L$  et  $R$  au lieu de  $G_0$  et  $G_1$ . De tels champs s'interpréteraient comme des états liés résultant de la dynamique de la techni-théorie, puisqu'ils se transforment sous les symétries de cette dernière, et non sous les symétries de Yang-Mills élémentaires  $SU(2)_{G_0}$  et  $SU(2)_{G_1}$  : ce sont des fermions composites, que nous considérerons au chapitre 6. Rappelons que la possibilité de distinguer entre les transformations agissant sur les GBs et celles agissant sur les champs élémentaires fait l'un des intérêts des spurions. Nous en considérons ici les conséquences pour les fermions.

Il nous faut à présent identifier la symétrie  $U(1)_{B-L}$  supplémentaire avec la transformation  $U(1)_{T_{d3}}$  de la section 5.2.1. Cette identification sera à nouveau réalisée *via* une contrainte de covariance constante imposée sur un nouveau spurion  $\phi$ , lequel doit donc porter une charge  $B-L$ . Ce spurion est un doublet complexe <sup>13</sup> avec la loi de transformation suivante sous  $S_{\text{naturel}}$  <sup>14</sup>

$$\phi \mapsto G_0 e^{i \frac{\alpha^0}{2}} \phi. \quad (5.104)$$

Ce doublet complexe ne doit pas être confondu avec le doublet de Higgs  $\varphi$  du SM, qui ne porte pas de charge  $B-L$ . De plus, rappelons que  $\phi$  n'est pas un champ dynamique ici.

Notre choix de la charge  $U(1)_{B-L}$  pour ce doublet est tel que l'on obtienne la normalisation usuelle pour les charges  $B-L$  des fermions après avoir identifié les connexions. La condition de covariance constante imposée sur ce spurion s'écrit explicitement

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - i \left( g_0 G_{0\mu} - \frac{B_\mu^0}{2} \right) \phi = 0. \quad (5.105)$$

<sup>12</sup>. A comparer avec (5.2-5.3).

<sup>13</sup>. Nous avons également déjà vu à la section 1.3.2 l'équivalence entre doublet complexe et matrice  $2 \times 2$  satisfaisant une condition de réalité.

<sup>14</sup>. On notera que cette transformation est identique à celle donnée en (5.103) pour un doublet leptonique droit.

A ce stade, il semblerait qu'on ne puisse pas résoudre les contraintes en fixant la jauge, la transformation  $SU(2)_{G_0}$  ayant déjà été utilisée. Il se trouve que les contraintes elles-mêmes, en restreignant l'espace des configurations, vont permettre une solution. On procède comme suit: de (5.105), on déduit, se plaçant dans la jauge standard (ce qui implique la nullité des deux premières composantes de  $G_\mu$  selon (5.52))

$$0 = [D_\mu, D_\nu] \phi \stackrel{\text{j. s.}}{=} -\frac{i}{2} (g_0 G_{0\mu\nu}^3 \tau^3 - B_{\mu\nu}^0) \phi. \quad (5.106)$$

Ceci implique soit que les deux composantes de  $\phi$  sont identiquement nulles, soit que

$$B_{\mu\nu}^0 \stackrel{\text{j. s.}}{=} \pm g_0 G_{0\mu\nu}^3. \quad (5.107)$$

Nous rejetons la première possibilité, les spurions étant précisément introduits pour contraindre les champs. Les deux autres possibilités, distinguées par le signe dans (5.107), sont équivalentes à une transformation de jauge discrète  $G_0 = i\tau^2$  près, et donc ne peuvent être distinguées physiquement: nous choisirons la possibilité correspondant à la relation indépendante de jauge suivante

$$\phi^\dagger Y_d = 0. \quad (5.108)$$

Dans la jauge standard où (5.69) est valable, ceci implique que seule la composante supérieure de  $\phi$  est non-nulle: nous obtenons donc le signe positif dans l'équation (5.107). Il existe donc une fonction  $f'$  telle que

$$B_\mu^0 = g_0 G_{0\mu}^3 + \partial_\mu f'. \quad (5.109)$$

Effectuant à présent la transformation  $U(1)_{B-L}$  définie par

$$\alpha^0 = f', \quad (5.110)$$

on obtient l'égalité entre les connexions elles-mêmes

$$B_\mu^0 \stackrel{\text{j. s.}}{=} g_0 G_{0\mu}^3 \stackrel{\text{j. s.}}{=} g_0 b_\mu^0, \quad (5.111)$$

ce qui implique la réduction de symétrie décrite par le tableau 5.3.

$$\begin{array}{c} \underbrace{U(1)_{B-L} \times U(1)_{T_d 3}} \\ \downarrow \phi \\ U(1)_Y \end{array}$$

**Tableau 5.3.** Réduction de symétrie *via* le spurion  $\phi$ .

Utilisant (5.105), on remarque que la composante non-nulle de  $\phi$  est une constante dans cette jauge. Cette constante peut être choisie réelle en utilisant une transformation  $\alpha^0$  constante, qui ne modifie pas (5.111). On obtient finalement

$$\phi \stackrel{\text{j. s.}}{=} \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.112)$$

avec

$$\partial_\mu \zeta = 0. \quad (5.113)$$

Notons que le spurion  $\phi$ , lié au choix du groupe  $U(1)_Y$ , jouera un rôle particulier dans la suite, introduisant la violation du nombre leptonique. Nous distinguerons donc le comptage de puissance pour  $\zeta$  de celui pour  $\epsilon$ : en pratique nous nous intéresserons à la situation  $\zeta \ll \epsilon$ . On comptabilisera ainsi

$$\phi = \mathcal{O}(\zeta). \quad (5.114)$$

## Résultats

En résumé, grâce aux contraintes elles-mêmes, nous avons pu trouver une jauge dans laquelle la solution des contraintes prend la forme suivante: les spurions se réduisent aux constantes suivantes

$$X \stackrel{\text{j. s.}}{=} \xi \mathbb{1}_{2 \times 2}, \quad (5.115)$$

$$Y_u \stackrel{\text{j. s.}}{=} \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.116)$$

$$\phi \stackrel{\text{j. s.}}{=} \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.117)$$

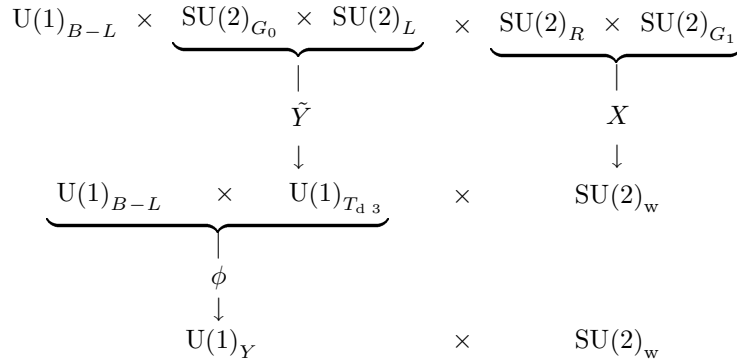
Comme cette jauge est atteinte en fixant neuf des treize fonctions de jauge de  $\text{SU}(2)_{G_0} \times \text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R \times \text{SU}(2)_{G_1} \times \text{U}(1)_{B-L}$ , seules quatre combinaisons des treize connexions seront non-nulles: on a en effet les identifications suivantes

$$R_\mu^a \stackrel{\text{j. s.}}{=} g_1 G_{1\mu}^a, \quad \text{pour } a = 1, 2, 3, \quad (5.118)$$

$$L_\mu^{1,2} \stackrel{\text{j. s.}}{=} G_{0\mu}^{1,2} \stackrel{\text{j. s.}}{=} 0, \quad (5.119)$$

$$L_\mu^3 \stackrel{\text{j. s.}}{=} g_0 G_{0\mu}^3 \stackrel{\text{j. s.}}{=} B_\mu^0 \stackrel{\text{j. s.}}{=} g_0 b_\mu^0. \quad (5.120)$$

La réduction de symétrie du groupe  $S_{\text{naturel}} = \text{SU}(2)_{G_0} \times \text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R \times \text{SU}(2)_{G_1} \times \text{U}(1)_{B-L}$  à l'aide des trois spurions  $X$ ,  $\tilde{Y}$  et  $\phi$  a permis d'obtenir le groupe  $\text{SU}(2)_w \times \text{U}(1)_Y$ , selon le tableau 5.4. Dans ce tableau, on a choisi pour les besoins de la représentation, d'ordonner les réductions de symétries dues respectivement aux spurions  $\tilde{Y}$  et  $\phi$ . Ceci correspond à l'ordre chronologique utilisé dans la description ci-dessus, bien que cet ordre n'ait aucune signification physique.



**Tableau 5.4.** Description de la réduction de symétrie opérée par les spurions  $X$ ,  $\tilde{Y}$  et  $\phi$ .

Le groupe d'invariance  $\text{SU}(2)_w \times \text{U}(1)_Y$  de la solution des contraintes correspond à une symétrie dynamique: les connexions sont des variables d'intégration (champs de jauge).

### 5.2.4 Couplages des fermions

Avec les notations précédentes, les termes à l'ordre  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0 \zeta^0)$  impliquant les fermions s'écrivent

$$\mathcal{L}_{\text{fermions}}^{(2,0,0)} = i \overline{\chi_L} \gamma^\mu D_\mu \chi_L + i \overline{\chi_R} \gamma^\mu D_\mu \chi_R + \text{interactions à quatre fermions}. \quad (5.121)$$

Les interactions à quatre fermions ont bien la dimension chirale  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0 \zeta^0)$ , mais sont cependant divisées par une échelle de masse au carré: la question de leur suppression est donc similaire au cas du SM. Nous omettons donc les termes d'interactions à quatre fermions dans le cadre de cette première étude, puisqu'ils peuvent être supprimés par une échelle arbitraire.

Afin de montrer que les couplages aux champs vecteurs à cet ordre sont automatiquement identiques à ceux du SM, on part de la définition de la dérivée covariante appliquée aux doublets fermioniques, qui est donnée, d'après (5.102-5.103), par

$$D_\mu \chi_L = \partial_\mu \chi_L - i \left( g_1 G_{1\mu} + \frac{B-L}{2} B_\mu^0 \right) \chi_L, \quad (5.122)$$

$$D_\mu \chi_R = \partial_\mu \chi_R - i \left( g_0 G_{0\mu} + \frac{B-L}{2} B_\mu^0 \right) \chi_R. \quad (5.123)$$



Injectant la solution des contraintes dans la jauge standard, les équations (5.122-5.123) deviennent

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \chi_L &\equiv D_\mu \chi_L|_{\text{j. s.}} \\ &= \partial_\mu \chi_L - i \left( g_1 G_{1\mu} + g_0 \frac{B-L}{2} b_\mu^0 \right) \chi_L,\end{aligned}\quad (5.124)$$

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \chi_R &\equiv D_\mu \chi_R|_{\text{j. s.}} \\ &= \partial_\mu \chi_R - i g_0 b_\mu^0 \left( \frac{\tau^3}{2} + \frac{B-L}{2} \right) \chi_R.\end{aligned}\quad (5.125)$$

On peut vérifier, à l'aide du tableau 5.5, que les charges des différents fermions sous la symétrie  $U(1)$  restante correspondant au degré de liberté  $f$  sont bien les hypercharges, par comparaison avec le tableau 1.3 page 28. Ici, on a noté  $\chi_u$  et  $\chi_d$  respectivement les composantes supérieures et inférieures du doublet  $\chi$ . On peut explicitement vérifier que les charges du spurion  $\phi$  sont différentes de celles du doublet de Higgs, donnée dans le tableau 1.3. En particulier, le spurion  $\phi$  introduit la violation de  $B-L$ , puisqu'il identifie la transformation  $U(1)_{B-L}$  à celle du sous-groupe abélien  $U(1)_{T_d 3}$  de  $SU(2)_{G_0+L}$ , ce qui se vérifie dans le tableau en considérant les charges de la composante non-nulle dans la jauge standard:  $\phi_u$ . D'après le tableau 1.3, on constate que le boson de Higgs du SM, lui, ne brisait pas  $U(1)_{B-L}$ , mais identifiait les transformations générées par  $T_w 3$  et  $T_d 3$ .

	$T_w 3$	$T_d 3$	$B-L$	$Y$	$Q$
Leptons ( $B-L=-1$ )					
$\chi_{Lu}$	1/2	0	-1	-1	0
$\chi_{Ld}$	-1/2	0	-1	-1	-1
$\chi_{Ru}$	0	1/2	-1	0	0
$\chi_{Rd}$	0	-1/2	-1	-2	-1
Quarks ( $B-L=1/3$ )					
$\chi_{Lu}$	1/2	0	1/3	1/3	2/3
$\chi_{Ld}$	-1/2	0	1/3	1/3	-1/3
$\chi_{Ru}$	0	1/2	1/3	4/3	2/3
$\chi_{Rd}$	0	-1/2	1/3	-2/3	-1/3
Spurion $\phi$					
$\phi_u$	0	1/2	-1	0	0
$\phi_d$	0	-1/2	-1	-2	-1

**Tableau 5.5.** Valeurs propres des composantes des champs sous certains opérateurs.

A ce stade, il est utile de définir des champs invariants sous  $SU(2)_{G_1}$  et  $SU(2)_R$  pour les fermions, comme nous l'avons fait pour les champs de jauge à la section 5.2.2

$$\psi_L = \Sigma U \chi_L \mapsto L e^{-i \frac{B-L}{2} \alpha^0} \psi_L, \quad (5.126)$$

$$\psi_R = \chi_R \mapsto G_0 e^{-i \frac{B-L}{2} \alpha^0} \psi_R. \quad (5.127)$$

Ces définitions ne donneront pas de variation anormales de la fonctionnelle génératrice tant que l'on aura trois quarks pour un lepton, la trace de  $B-L$  sur les fermions étant alors nulle (voir la section 6.3.2 à ce sujet). Utilisant la notation  $\psi$  pour la somme des deux projections de chiralité

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad (5.128)$$

on peut réécrire le lagrangien (5.121) sous la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{fermions}}^{(2,0,0)} \Big|_{\text{j. s.}} &= i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + e \bar{\psi} \gamma^\mu Q \psi A_\mu + \frac{e}{c s} \bar{\psi} \gamma^\mu \left\{ \frac{\tau^3}{2} \frac{(1-\gamma_5)}{2} - s^2 Q \right\} \psi Z_\mu \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2} s} \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^\pm \frac{(1-\gamma_5)}{2} \psi W_\mu^\pm + \text{interactions à quatre fermions},\end{aligned}\quad (5.129)$$

avec

$$Q = \frac{\tau^3}{2} + \frac{B-L}{2}. \quad (5.130)$$

Ceci constitue le résultat désiré: les couplages des fermions aux bosons vecteurs à l'ordre  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0 \zeta^0)$  sont identiques à ceux du SM (voir (1.31) et la section 1.2.1.2).

Un point important est que les termes de couplage non-standard

$$i \overline{\chi_L} \gamma^\mu X^\dagger \Sigma^\dagger (D_\mu \Sigma) X \chi_L = \mathcal{O}(p^2 \epsilon^2 \zeta^0), \quad (5.131)$$

$$i \overline{\chi_R} \gamma^\mu Y_{u,d} \Sigma (D_\mu \Sigma^\dagger) Y_{u,d}^\dagger \chi_R = \mathcal{O}(p^2 \epsilon^2 \zeta^0), \quad (5.132)$$

ne pourront apparaître qu'à l'ordre  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^2 \zeta^0)$ . Ceci est automatique dans ce formalisme de spurions, sans hypothèse supplémentaire, et constitue un résultat nouveau par rapport à la littérature [ABCH85, CDCDG87, CDCD<sup>+</sup>89, PZ90, BEM99]. Notons que ces termes, écrits dans la jauge unitaire, donneraient des couplages arbitraires des fermions gauches aux bosons vecteurs, puisque les coefficients apparaissant en facteurs seraient *a priori* différents selon la génération considérée: le terme (5.131) correspond en effet à (5.24) dans l'approche sans spurions. Cet opérateur introduit également des transitions entre saveurs, puisque les doublets peuvent appartenir à différentes familles. D'autre part, l'opérateur (5.132) produit des couplages des fermions de chiralité droite aux  $W^\pm$ , de même que le faisait (5.25) dans l'approche sans spurions: la distinction est qu'ici l'opérateur n'apparaît pas à l'ordre dominant. Notons cependant qu'avec la relation  $\epsilon = \mathcal{O}(p^{1/2})$  suggérée par le comptage des masses des fermions à la section 5.2.5, ces termes pourront apparaître avant les corrections en boucles.

### 5.2.5 Masses de Dirac

Etant données les propriétés de transformation (5.102-5.103), on peut voir que la construction de termes de masse pour les fermions nécessite des puissances des spurions, contrairement au cas de l'identification directe entre les transformations des champs de jauge et celles des GBs (5.20-5.21). Les opérateurs correspondants sont quadratiques en champs fermioniques, avec deux insertions de spurions, et donc comptabilisés comme  $\mathcal{O}(p^1 \epsilon^2 \zeta^0)$ .

Ceci suggère la possibilité évoquée ci-dessus d'imposer la relation suivante entre les paramètres de développement selon  $\epsilon = \mathcal{O}(p^{1/2})$ , afin que le terme de masse et le terme cinétique des fermions (5.121) apparaissent au même ordre dans un comptage unique, c'est-à-dire au niveau du lagrangien  $\mathcal{O}(p^2)$ . Dans ce cas, la masse des fermions suit exactement le comptage nécessaire pour reproduire la formule de comptage de Weinberg. Notons que l'on peut cependant imaginer tenir compte de la hiérarchie des masses des fermions chargés par un comptage de puissances supplémentaire, lié à une symétrie horizontale, et qui viendrait compliquer cette comparaison. Dans ce cas, la masse du quark top serait vraisemblablement comptabilisée comme  $\mathcal{O}(p^1)$ , mais les autres seraient supprimées, ce qui est encore compatible avec la règle de comptage de Weinberg. En conséquence, nous n'imposerons pas à ce stade de lien entre les comptages en  $\epsilon$  et celui en  $p$ , l'important étant que la liberté à l'ordre le plus bas est la même que dans le SM en arbres.

On peut écrire des termes de masse de Dirac à l'ordre  $\mathcal{O}(p^1 \epsilon^2 \zeta^0)$ , qui sont invariants sous  $S_{\text{naturel}}$  (on utilise les indices de générations  $i, j$ )<sup>15</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{quarks}}^{(1,2,0)} = & -\lambda_{ij}^u \overline{\chi_{Ri}} Y_u \Sigma X \chi_{Lj} - \lambda_{ij}^{u*} \overline{\chi_{Lj}} X^\dagger \Sigma^\dagger Y_u^\dagger \chi_{Ri} \\ & - \lambda_{ij}^d \overline{\chi_{Ri}} Y_d \Sigma X \chi_{Lj} - \lambda_{ij}^{d*} \overline{\chi_{Lj}} X^\dagger \Sigma^\dagger Y_d^\dagger \chi_{Ri}. \end{aligned} \quad (5.133)$$

Ceci constitue les seuls termes donnant des masses aux fermions à cet ordre. On peut utiliser les champs  $\psi$  définis en (5.126-5.127), avec l'écriture suivante pour les quarks

$$\psi_i \rightarrow \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}, \quad (5.134)$$

15. Notons que l'on peut construire des termes contribuant au moment magnétique (et magnétique faible) des divers fermions à l'ordre  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^2 \zeta^0)$ : ces termes sont donc d'ordre supérieur. Ils sont également supprimés par une échelle (comme dans le SM), et nous ne les discutons donc pas plus avant, pour la même raison que dans le cas des interactions à quatre fermions.

ainsi que les définitions

$$m_{ij}^{u,d} = \eta \xi \lambda_{ij}^{u,d}. \quad (5.135)$$

Les termes de masse de Dirac (5.133) prennent alors la forme suivante, dans la jauge standard

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{(1,2)} \stackrel{\text{j. s.}}{=} - (m_{ij}^u \overline{u_{Ri}} u_{Lj} + m_{ij}^{u*} \overline{u_{Lj}} u_{Ri} + m_{ij}^d \overline{d_{Ri}} d_{Lj} + m_{ij}^{d*} \overline{d_{Lj}} d_{Ri}). \quad (5.136)$$

Le point important est que les masses et les différences de masses dans les doublets interviennent ensemble dans le lagrangien  $\mathcal{O}(p^1 \epsilon^2 \zeta^0)$ , et sont donc comptabilisées comme d'ordre  $\mathcal{O}(p^0 \epsilon^2 \zeta^0)$ : à cet ordre, le nombre de paramètres libre sera le même que dans le SM. Les constantes de développement  $\eta$  et  $\xi$  fournissant uniquement des facteurs multiplicatifs réels signifiant que ces masses sont considérées comme petites. Une fois cette distinction clarifiée, on constate que les matrices de masses  $m_{ij}^{u,d}$  contiennent exactement le même nombre de paramètres libres que celles introduites à la section 1.4.1 dans le cas du SM: en particulier dans le cas de trois générations, on pourra éliminer cinq phases en utilisant des redéfinitions des champs de quarks, obtenant une matrice CKM contenant trois angles physiques et une seule phase responsable de la violation de  $CP$  à cet ordre. A cet ordre, on aura donc la même prédiction que dans le cas du SM. Puisqu'il ne reste pas de scalaire dans le spectre, les termes de masses ne s'accompagnent pas ici de couplages avec un Higgs physique, contrairement au SM.

Dans le cas des leptons, on peut écrire des termes analogues aux précédents

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{leptons}}^{(1,2,0)} &= - \lambda_{ij}^\nu \overline{\chi_{Ri}} Y_u \Sigma X \chi_{Lj} - \lambda_{ij}^{\nu*} \overline{\chi_{Lj}} X^\dagger \Sigma^\dagger Y_u^\dagger \chi_{Ri} \\ &- \lambda_{ij}^e \overline{\chi_{Ri}} Y_d \Sigma X \chi_{Lj} - \lambda_{ij}^{e*} \overline{\chi_{Lj}} X^\dagger \Sigma^\dagger Y_d^\dagger \chi_{Ri}. \end{aligned} \quad (5.137)$$

En jauge standard, et utilisant les redéfinitions des champs (5.126-5.127) ainsi que l'écriture

$$\psi_i \rightarrow \begin{pmatrix} \nu_i \\ e_i \end{pmatrix}, \quad (5.138)$$

on voit que les termes (5.137) donnent des masses de Dirac d'ordre  $\mathcal{O}(p^0 \epsilon^2 \zeta^0)$  aux leptons. La difficulté est ainsi la même que dans le SM concernant la hiérarchie de masse entre l'électron et le quark top (voir section 1.4.1). La différence avec le SM réside dans l'écriture des termes de masse de Majorana pour les neutrinos, ce que nous considérons à présent. Ceci demande de considérer le lagrangien au-delà de l'ordre  $\mathcal{O}(p^1 \epsilon^2 \zeta^0)$ .

### 5.2.6 Violation du nombre leptonique

Dans le secteur des leptons, c'est-à-dire pour des doublets  $\chi$  se transformant comme en (5.102-5.103), mais avec  $B - L = -1$ , on peut construire des opérateurs spinoriels invariants sous  $S_{\text{naturel}}$ . Il s'agit des deux opérateurs suivants, qui impliquent le spurion  $\phi$

$$N_{Ri} = \phi^\dagger \chi_{Ri} = \mathcal{O}(p^{1/2} \epsilon^0 \zeta^1), \quad (5.139)$$

$$N_{Li} = \phi^\dagger Y_u \Sigma X \chi_{Li} = \mathcal{O}(p^{1/2} \epsilon^2 \zeta^1). \quad (5.140)$$

Rappelons que la contrainte sur le spurion  $\phi$  impose dans la jauge standard l'identification des transformations  $U(1)_{B-L}$  et du sous groupe abélien de  $SU(2)_{G_0+L}$ . Ceci implique que les opérateurs ci-dessus vont violer  $B - L$ . En effet, dans la jauge standard on voit que ces opérateurs projettent les composantes  $\nu$  du doublet leptonique

$$N_{Ri} \stackrel{\text{j. s.}}{=} \zeta \nu_{Ri}, \quad (5.141)$$

$$N_{Li} \stackrel{\text{j. s.}}{=} \zeta \xi \eta \nu_{Li}. \quad (5.142)$$

On pourrait également considérer le pendant de l'opérateur  $N_{Li}$  de (5.140) en remplaçant  $Y_u$  par  $Y_d$ . Cependant, un tel opérateur est identiquement nul d'après (5.108).

A l'aide des opérateurs introduits ci-dessus, on peut construire des termes de masse de Majorana invariants sous  $S_{\text{naturel}}$

$$\overline{N_{Ri}} (N_{Rj})^c = \mathcal{O}(p^1 \epsilon^0 \zeta^2), \quad (5.143)$$

$$(\overline{N_{Li}})^c N_{Lj} = \mathcal{O}(p^1 \epsilon^4 \zeta^2). \quad (5.144)$$

Dans ce cas, la violation de  $B - L$  est due à la réduction de symétrie par les spurions et les contraintes associées. En revanche, pour ce qui est de l'opérateur correspondant (1.119) dans le cas du SM, ou de l'opérateur (5.26) dans le cas de la LEET sans spurions,  $B - L$  et  $T_{d3}$  étaient séparément brisés, conservant  $Y/2 = T_{d3} + (B - L)/2$ . Dans le cas présent, l'identification entre les deux transformations correspondantes est due aux contraintes sur le spurion  $\phi$  (voir les charges de  $\phi_u$  dans le tableau 5.5). Le fait que les deux opérateurs violant le nombre leptonique (5.143-5.144) contiennent un facteur  $\zeta^2$  suggère de considérer

$$\zeta \ll \epsilon, \quad (5.145)$$

auquel cas la violation du nombre leptonique engendrée sera faible. Le comptage utilisé pour le spurion  $\phi$  sera donc différent de celui des spurions  $X$  et  $\tilde{Y}$

On peut également construire d'autres termes de masse de Dirac pour les neutrinos, à partir de l'opérateur

$$\overline{N_{Ri}} N_{Lj} = \mathcal{O}(p^1 \epsilon^2 \zeta^2). \quad (5.146)$$

Ce terme ne sera qu'une correction aux termes de masses de Dirac usuels de la première ligne de (5.137) pour les neutrinos. Il en sera de même pour le terme suivant donnant une correction aux termes de Dirac pour les leptons chargés

$$\overline{\chi_{Ri}} \phi_c^\dagger \phi_c Y_{uc} \Sigma X \chi_{Lj} = \mathcal{O}(p^1 \epsilon^2 \zeta^2). \quad (5.147)$$

Un point commun aux opérateurs (5.144) et (5.146) est qu'ils font apparaître le spurion  $\phi$  (et donc la constante  $\zeta$ ). Par comparaison avec les termes de masse de Dirac de la section 5.2.5, ils contiennent également des puissances plus élevées des paramètres  $\xi$  et  $\eta$ . D'autre part, les masses de Majorana pour les  $\nu_R$ , qui sont engendrées par (5.143) sont également petites, puisque proportionnelles à  $\zeta^2$ . Rappelons que, dans le cas de la LEET que nous considérons, les  $\nu_R$  et leptons droits chargés sont les deux composantes d'un doublet: on s'est intéressé à des doublets droits  $\chi_R$  se transformant sous  $SU(2)_{G_0}$ , en relation avec la symétrie custodiale. On ne peut donc pas se passer des  $\nu_R$  comme on le ferait dans le SM, ni les considérer comme étant lourds<sup>16</sup>. Rendre compte des faibles masses des neutrinos nécessiterait alors la hiérarchie  $\lambda^\nu \ll \lambda^e$  pour les valeurs propres des matrices  $\lambda_{ij}^\nu$  et  $\lambda_{ij}^e$  apparaissant dans (5.137). Une solution est d'interdire complètement les termes de Dirac pour les neutrinos, en demandant l'invariance sous une symétrie discrète exacte. On considère la transformation abélienne suivante appliquée aux doublets leptoniques droits

$$\chi_R \mapsto \chi'_R \equiv (1 - \Pi) \chi_R + e^{i\theta} \Pi \chi_R, \quad (5.148)$$

où le projecteur  $\Pi$  est défini par

$$\Pi = \frac{\phi \phi^\dagger}{(\phi^\dagger \phi)}. \quad (5.149)$$

Notons que  $\chi'_R$  se transforme identiquement à  $\chi_R$  sous  $S_{\text{naturel}}$ . Précisons encore que cette transformation chirale définie en (5.148) ne génère pas d'anomalies dans l'intégrale fonctionnelle, du fait des contraintes appliquées sur les spurions. En effet, dans la jauge standard, on peut voir que la transformation (5.148) se réduit à  $\nu_R \mapsto e^{i\theta} \nu_R$ . Or, d'après leurs charges sous  $SU(2)_w \times U(1)_Y$ , on sait que les degrés de liberté  $\nu_R$  ne couplent à aucun champ vectoriel dynamique. En réalité, nous imposerons uniquement la symétrie  $\mathbb{Z}_2$  correspondant au cas particulier  $\theta = \pi$  dans (5.148), soit

$$\chi_R \mapsto (1 - 2\Pi) \chi_R, \quad (5.150)$$

16. De façon générale, les degrés de liberté de la LEET sont par définition légers, et ne peuvent pas acquérir une masse d'ordre  $10^{15}$  GeV. D'autre part, si  $\zeta$  n'était pas petit, il nous faudrait considérer toutes les puissances du spurion  $\phi$ , soit une infinité d'opérateurs sans principe d'organisation, et la LEET serait inapplicable.

ce qui implique dans la jauge standard

$$\nu_R \mapsto -\nu_R. \quad (5.151)$$

On peut vérifier que l'invariance du lagrangien sous (5.150) requiert

$$\lambda_{ij}^\nu = 0, \quad (5.152)$$

dans les termes de masses de Dirac (5.137): utilisant (5.108), on remarque en effet que l'on a, indépendamment de la jauge

$$Y_u^\dagger \Pi = Y_u^\dagger, \quad (5.153)$$

$$Y_d^\dagger \Pi = 0. \quad (5.154)$$

Les masses de Dirac spécifiques aux neutrinos, introduites en (5.146), seront également absentes en vertu de cette symétrie. Le seul terme de masse restant qui implique les  $\nu_L$  est le terme de Majorana donné en (5.143)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{leptons}}^{(1,4,2)} &= \sum_{i,j=1}^3 \left( \lambda_{ij}^{M\nu} \overline{(N_{Li})^c} N_{Lj} + \lambda_{ij}^{M\nu*} \overline{N_{Lj}} (N_{Li})^c \right) \\ &\stackrel{\text{j. s.}}{=} \xi^2 \eta^2 \zeta^2 \sum_{i,j=1}^3 \left( \lambda_{ij}^{M\nu} \overline{(\nu_{Li})^c} \nu_{Lj} + \lambda_{ij}^{M\nu*} \overline{\nu_{Lj}} (\nu_{Li})^c \right). \end{aligned} \quad (5.155)$$

Dans notre cas, la petitesse des masses des neutrinos par rapport à celles des fermions chargés se comprend donc suite à la relation

$$\xi^2 \eta^2 \zeta^2 \ll \xi \eta, \quad (5.156)$$

au lieu d'être due à la suppression par une échelle comme dans le cas de l'extension du SM (1.119). En effet, dans la LEET, l'opérateur correspondant n'est plus divisé par une échelle. Il apparaîtrait à l'ordre  $\mathcal{O}(p^1)$  dans un simple comptage chirale. En revanche, il est ici relégué à des ordres supérieurs en puissances des spurions, générant des petites masses de Majorana pour les neutrinos. La suppression de ces masses des neutrinos peut être particulièrement efficace si la constante  $\zeta$  qui découle du spurion  $\phi$  est petite devant  $\xi$  et  $\eta$ , comme déjà supposé en (5.145) pour décrire la faible violation du nombre leptonique.

Précisons que les spurions ne sont que la description effective d'un mécanisme dynamique engendrant les opérateurs effectifs. La LEET laisse ouverte les questions concernant les détails du mécanisme sous-jacent. On peut cependant constater que ce mécanisme est différent du *see-saw*, en considérant les degrés de liberté  $\nu_R$ , ce que nous faisons à présent.

Les  $\nu_R$  possèdent des masses proportionnelles à  $\zeta^2$ , uniquement dues aux termes de Majorana (5.143). Ils sont donc légers relativement à l'échelle  $\Lambda \sim 4\pi f$ . Ils sont également stables. Ils ne pourront interagir avec d'autres particules qu'à travers des termes d'ordre supérieurs. Ils découplent donc en première approximation, et on peut donc les appeler neutrinos « quasi-stériles ». Notons cependant qu'on ne peut pas simplement omettre les champs  $\nu_R$ , puisqu'ils auront des interactions aux ordres spurioniques supérieurs. En effet, le lagrangien  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^2 \zeta^0)$  introduira leurs couplages au  $Z^0$ , ce qui se vérifie en écrivant (5.132) dans la jauge standard, pour le cas d'un doublet leptonique

$$i \overline{\chi_R} \gamma^\mu Y_u \Sigma (D_\mu \Sigma^\dagger) Y_u^\dagger \chi_R \stackrel{\text{j. s.}}{=} \eta^2 \frac{g}{c} \overline{\nu_R} \gamma^\mu \nu_R Z_\mu. \quad (5.157)$$

Ceci signifie que la largeur du  $Z^0$  en neutrinos stériles  $\nu_R$  sera supprimée par un facteur  $\eta^4$  vis-à-vis de la largeur du  $Z^0$  en les autres fermions légers. Nous voyons donc que les neutrinos stériles qui interviennent dans la LEET sont très différents des neutrinos stériles produits par le mécanisme *see-saw* dans le SM (voir section 1.6.1)<sup>17</sup>. Les termes à quatre fermions impliquant ces  $\nu_R$  généreront également d'autres interactions, mais ces dernières seront à nouveau supprimées par une échelle de masse. La physique de ces neutrinos quasi-stériles est développée plus avant dans [HS].

<sup>17</sup>. Dans le cas d'un mécanisme *see-saw*, les neutrinos stériles sont lourds par rapport à l'échelle électrofaible, et se désintègrent *via* les couplages de Yukawa en bosons de Higgs et neutrino actif.

Précisons par ailleurs que les termes

$$i \overline{\chi_R} \gamma^\mu Y_u \Sigma (D_\mu \Sigma^\dagger) Y_d^\dagger \chi_R, \quad (5.158)$$

$$i \overline{\chi_R} \gamma^\mu Y_d \Sigma (D_\mu \Sigma^\dagger) Y_u^\dagger \chi_R, \quad (5.159)$$

représentant des couplages des courants chargés droits aux  $W^\pm$ , sont interdits par la symétrie discrète (5.150) dans le cas où  $\chi$  est un doublet leptonique. Cette symétrie interdit également les termes de moment magnétiques pour les neutrinos (actifs ou stériles): les seuls termes possibles de ce type sont des moment de transition (entre générations) de Majorana, qui violent donc le nombre leptonique par deux unités. De tels termes seront comptabilisés comme  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^4 \zeta^2)$  pour les neutrinos actifs  $\nu_L$ , et  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0 \zeta^2)$  pour les neutrinos stériles  $\nu_R$ . Il seront de plus supprimés par une échelle (comme dans le SM), de même que les interactions à quatre fermions. Ce sont là les seuls opérateurs que l'on peut construire à l'ordre  $\mathcal{O}(p^2)$  et qui génèrent des transitions  $\Delta L = 2$ .

Parmi les opérateurs à quatre fermions qui étaient *irrelevantes* dans le SM, il en existe également qui violent à la fois le nombre leptonique et le nombre baryonique, mais avec  $\Delta B = \Delta L$  [Wei79b]. La suppression par une échelle pour ces opérateurs fonctionne de la même façon que dans le SM, et n'est pas liée aux aspects de l'EWSB discutés ici.

## 5.3 Résumé

L'application directe des LEET à la brisure électrofaible sans scalaire physique rencontre des difficultés dès l'ordre dominant  $\mathcal{O}(p^2)$ . En effet, à cet ordre, les règles de construction de la LEET définie par la symétrie  $SU(2)_w \times U(1)_Y$  autorisent des interactions supplémentaires par rapport au SM. Certains termes qui étaient *irrelevantes* dans le SM car ils nécessitaient la présence du doublet de Higgs élémentaire et avaient donc une dimension physique supérieure à quatre, ne sont plus supprimés par une échelle de masse dans la LEET, du fait de la réalisation non-linéaire de la symétrie. Ils apparaîtraient dès l'ordre  $\mathcal{O}(p^2)$  dans la LEET, et même pour certains, dès l'ordre  $\mathcal{O}(p^1)$ .

On souhaite donc trouver une formulation systématique pour se débarrasser des termes indésirables à cet ordre. Ceci implique de recourir à une symétrie plus grande, et d'utiliser de nouveaux paramètres de développement, à la manière du chapitre 4. Nous proposons donc de baser la construction de la LEET sur une symétrie plus grande  $S_{\text{naturel}} = SU(2)^4 \times U(1)_{B-L}$  (dont un sous-groupe est la symétrie custodiale) caractéristique de la limite dans laquelle le secteur de brisure en interactions fortes n'interagit pas avec le secteur élémentaire regroupant les champs de Yang-Mills et les fermions. On doit distinguer cette situation de la limite où les constantes de couplages de jauge tendent vers zéro, ce qui correspond à une symétrie différente; c'est pourquoi l'introduction de paramètres supplémentaires via les spurions est nécessaire. On peut considérer le cas où les paramètres correspondants sont égaux à zéro, et effectuer un développement autour de ce point, la symétrie  $S_{\text{naturel}}$  dans la limite des petits paramètres garantissant que ces mêmes paramètres sont protégés.

La réduction de symétrie pour obtenir le groupe de jauge  $S_{\text{réduit}} = SU(2)_w \times U(1)_Y \subset S_{\text{naturel}}$  nécessite un spurion réel  $X$  (voir le cas des *mooses*, chapitre 4) pour identifier le groupe de jauge  $SU(2)_w$ , un spurion  $2 \times 2$  complexe  $\tilde{Y}$  pour sélectionner le groupe  $U(1)_{T_{d3}}$  et, enfin, un doublet complexe  $\phi$  portant nécessairement une charge  $B - L$ , dont le rôle est de réduire  $U(1)_{B-L} \times U(1)_{T_{d3}}$  vers  $U(1)_Y$ . La solution des contraintes de covariance constante imposées sur les spurions est précisément invariante sous ce groupe  $S_{\text{réduit}}$ , qui est jaugé. Remarquons que le choix et le nombre des spurions nécessaires pour opérer la réduction d'un groupe  $S_{\text{naturel}}$  vers un sous-groupe  $S_{\text{réduit}}$  avec un alignement défini est essentiellement unique, comme on peut s'en convaincre en considérant la démarche utilisée pour résoudre les contraintes dans la jauge standard.

On observe de plus que le spurion  $\tilde{Y}$  introduit la brisure de l'isospin faible, qui nécessite donc des facteurs de la constante  $\eta$ . Le doublet complexe  $\phi$  paramètre la violation de  $B - L$ , qui s'accompagne donc de puissances de  $\zeta$ .

Le développement en puissances des spurions distingue entre les différents termes d'un même ordre en puissances de  $p$ . On trouve que les termes indésirables mentionnés plus haut nécessitent des insertions de spurions afin de les rendre invariants sous  $S_{\text{naturel}}$ : ils sont donc relégués aux ordres supérieurs du développement correspondant. En particulier, l'opérateur donnant une contribution en arbres au paramètre  $S$  peut être rejeté à l'ordre des contributions à une boucle. Il en est de même pour le paramètre  $T$ . Les termes d'interactions non-standard des fermions aux bosons vecteurs apparaissent à l'ordre sous-dominant: les corrections à l'universalité des couplages, et à la structure  $V - A$  des couplages des  $W^\pm$  sont donc plus petites que dans l'approche effective à l'EWSB basée uniquement sur la symétrie  $SU(2) \times U(1)$ , et méritent donc bien le qualificatif de corrections dans le cas présent. Une utilité du formalisme de spurions est de montrer comment ces termes peuvent être traités de façon cohérente comme étant d'ordre supérieur.

D'autre part, le spurion  $\tilde{Y}$  introduit une liberté suffisante pour avoir, à l'ordre auquel les masses des fermions apparaissent, une matrice de masse impliquant des masses différentes au sein d'un doublet, ainsi qu'une matrice de mélange dans le secteur des quarks analogue à la matrice CKM du SM. Ceci signifie qu'une théorie de brisure dynamique de la symétrie électrofaible implique *a priori* assez de brisure de l'isospin faible pour générer les différences de masses au sein des doublets: en revanche le spurion  $\tilde{Y}$  ne fait que rendre compte de ce fait, sans permettre d'expliquer l'origine du mécanisme. Précisons par ailleurs que, si l'on souhaite strictement reproduire la formule de comptage de Weinberg, on utilisera la relation suivante entre le développement en puissances des spurions  $X, \tilde{Y}$  et des impulsions:  $\epsilon = \mathcal{O}(p^{1/2})$ .

Dans le cas des leptons, on fait appel à une symétrie  $\mathbb{Z}_2$  résiduelle pour interdire les masses de Dirac pour les neutrinos. Les degrés de libertés  $\nu_R$ , qui sont introduits dans cette approche afin de compléter les doublets sous la symétrie custodiale, découplent alors des autres fermions. Ils sont cependant maintenus parmi les degrés de liberté légers de la LEET: leurs masses (de type Majorana) sont proportionnelles à  $\zeta^2$  et donc petites devant  $\Lambda \sim 4\pi f$ . Les masses (de type Majorana) des neutrinos gauches  $\nu_L$  contiennent un facteur  $\xi^2 \eta^2 \zeta^2$ . On doit donc envisager le spurion  $\phi$  comme étant de magnitude faible devant les autres spurions. Cette description permet de rendre compte des faibles masses des neutrinos actifs, et d'une faible violation du nombre leptonique. A ce stade, le comptage pour le spurion  $\phi$  reste *a priori* distinct.

Pour résumer les effets impliquant les spurions que nous avons décrits dans ce chapitre, nous présentons dans les tableaux 5.6 et 5.7 une liste des grandeurs physiques dont les valeurs contiendront des puissances des paramètres  $\xi, \eta$  et  $\zeta$  découlant des spurions. Ceci permet de voir que les différentes observables interviendront chacune avec une puissance définie de ces trois paramètres. Les autres constantes sans dimension sont *a priori* d'ordre un <sup>18</sup>.

Grandeur physique	Ordre spurionique
Masses des fermions chargés	$\xi \eta$
Masses des $\nu_L$ (actifs)	$\xi^2 \eta^2 \zeta^2$
Masses des $\nu_R$ (quasi-stériles)	$\zeta^2$

**Tableau 5.6.** Effets physiques  $\mathcal{O}(p^1)$  impliquant les spurions, avec les puissances de petits paramètres apparaissant en facteur.

Effet Physique	Ordre spurionique
Corrections à l'universalité des couplages gauches	$\xi^2$
Corrections à l'universalité des couplages droits	$\eta^2$
Paramètre $S$	$\xi^2 \eta^2$
Paramètre $T$	$\eta^4$

**Tableau 5.7.** Effets physiques  $\mathcal{O}(p^2)$  impliquant les spurions, avec les puissances de petits paramètres apparaissant en facteur.

<sup>18</sup>. Nous avons déjà mentionné la possibilité d'utiliser une symétrie horizontale pour décrire la hiérarchie des masses pour les fermions chargés.

Concernant les autres opérateurs qui étaient *irrelevantes* dans le cas du SM (par exemple les termes donnant des contributions aux moments magnétiques ainsi que les interactions à quatre fermions), on note qu'ils sont également divisés par une puissance d'une échelle ayant une dimension de masse dans la LEET. Cependant, cette échelle n'a *a priori* rien à voir avec l'échelle  $\Lambda \sim 4\pi f$ , puisque les interactions des champs élémentaires entre eux ne sont pas gouvernées par l'échelle à laquelle le secteur en interactions fortes produit ses premières résonances. L'échelle entrant en jeu ici est plutôt l'analogue de celle qui apparaîtrait dans les opérateurs effectifs *irrelevantes* du SM: on peut donc imaginer qu'elle soit nettement plus grande que  $4\pi f$ . La LEET se trouve confrontée aux mêmes difficultés que le SM, et nous n'avons donc pas discuté ces opérateurs: le but était ici de régler les problèmes qui se posaient pour que la LEET puisse reproduire certains des succès du SM.





## Chapitre 6

# Raccordement des anomalies dans la théorie effective pour la brisure électro-faible sans scalaire

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un autre aspect intervenant dans la construction de la LEET sans particule Higgs pour le secteur électrofaible: il s'agit de l'inclusion des termes nécessaires pour satisfaire à la condition de raccordement des anomalies [tH79a] entre la théorie effective et la techni-théorie. En effet, en fonction du contenu en champs fermioniques de la techni-théorie (le secteur de brisure en interactions fortes), certaines identités de Ward des courants de symétrie présenteront des anomalies: la fonctionnelle génératrice de ces courants de Noether n'est plus invariante sous les transformations locales des sources. En revanche, la forme générale que prend la variation de la fonctionnelle génératrice est connue, à une constante multiplicative près, qui reflète le contenu en champs de la techni-théorie.

L'expression à basse énergie de la fonctionnelle génératrice, qui est l'intégrale du lagrangien effectif sur les degrés de liberté légers, doit reproduire la même variation. La contrainte sur le lagrangien effectif est alors aussi forte que lorsque la variation est nulle [Leu94], *modulo* la connaissance de la constante multiplicative mentionnée ci-dessus. En revanche, l'écriture du lagrangien effectif approprié implique une construction particulière: dans le cas où la théorie effective contient uniquement des GBs, le résultat est connu, et l'on doit prendre en compte l'action de Wess-Zumino [WZ71].

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons au cas où les GBs disparaissent du spectre. Or, on sait de manière générale que les anomalies doivent être reproduites par des états physiques légers de spin 0 ou 1/2 [CG82]. Afin de déterminer en toute généralité comment le raccordement des anomalies procède dans une théorie sans scalaires physiques légers, nous considérons la possibilité que la techni-théorie produise des états liés légers de spin 1/2: des fermions composites. Rappelons que la distinction entre fermions composites et fermions élémentaires est claire du point de vue de la LEET: les premiers ne sont pas des variables fondamentales mais des états liés se transformant sous la symétrie chirale  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ , tandis que les seconds sont introduits en tant que champs externes à la techni-théorie, et se transforment donc sous les symétries de Yang-Mills élémentaires  $SU(2)_{G_0} \times SU(2)_{G_1}$ . Ces fermions élémentaires ne participent pas au raccordement des anomalies, puisqu'ils sont décrits par les mêmes champs à haute et basse énergie. Ceci est dû au fait que le secteur élémentaire interagit faiblement.

Nous introduisons donc la description des fermions composites, et discutons leurs couplages à l'ordre le plus bas: contrairement aux fermions élémentaires, les fermions composites possèdent, dès l'ordre  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0 \zeta^0)$  des couplages non-standards aux bosons vecteurs. Ces couplages non-standards interviennent lorsque l'on calcule la variation de la fonctionnelle génératrice à partir de la LEET. En effet, la variation due au déterminant des fermions composites s'ajoute à celle produite par les GBs: le tout doit reproduire la variation obtenue dans la techni-théorie. Nous montrons qu'il est effectivement possible de construire une généralisation du lagrangien de Wess-Zumino de façon à satisfaire cette condition, et ce quelle que soient les valeurs des couplages non-standards des fermions composites et de leurs charges sous  $U(1)_{B-L}$ . Ainsi, les couplages de ces fermions composites ne sont pas contraints du point de vue théorique, en particulier pour ce qui est de leurs charges  $B - L$ .

Le deuxième volet de l'étude montre que la symétrie à basse énergie  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$  de la techni-théorie doit être exempte d'anomalies pour que les GBs soient éliminés du spectre, réalisant ainsi le mécanisme de Higgs<sup>1</sup>. Ce résultat est en fait indépendant de la présence de fermions composites. On montre par ailleurs que l'annulation de la trace de  $B - L$  sur les fermions élémentaires est nécessaire pour l'élimination des GBs du spectre. Dans le cas du SM, cette annulation des anomalies est requise pour préserver la propriété de renormalisabilité, ce qui est différent d'un point de vue logique.

Nous donnons également les expressions nécessaires à l'étude des diagrammes triangulaires impliquant les fermions composites dans la jauge unitaire, et discutons les contributions de ces diagrammes aux vertex à trois bosons vecteurs.

La discussion est sensiblement améliorée par rapport à [HS04a]

## 6.1 Fermions composites et élémentaires

Dans cette section, nous décrivons la LEET à l'ordre dominant, distinguant entre le secteur composite résultant de la dynamique d'interactions fortes de la techni-théorie d'une part, et le secteur élémentaire constitué des champs de Yang-Mills et des fermions élémentaires qui leur sont directement couplés. Cette distinction est clarifiée par le formalisme des spurions. Le cadre considéré ici constitue une extension de celui du chapitre 5: le contenu en champs bosoniques est minimal, le secteur de brisure ne produisant que les trois GBs nécessaires pour donner leurs masses aux  $W^\pm$  et  $Z^0$ . En relation avec le raccordement des anomalies, nous considérons en plus la possibilité que le secteur de brisure produise des fermions composites légers. Nous reprenons les étapes de la formulation du lagrangien effectif en vue de l'étude du raccordement des anomalies. La fonctionnelle génératrice des sept courants de Noether  $J_L^{a\mu}, J_R^{a\mu}, J_{B-L}^\mu$  correspondant aux symétries globales de la techni-théorie est définie par

$$e^{i\Gamma[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]} = \int d[T] e^{i \int dx \mathcal{L}_{TT}[T] + J_L^{a\mu}[T] L_\mu^a + J_R^{a\mu}[T] R_\mu^a + J_{B-L}^\mu[T] B_\mu^0}. \quad (6.1)$$

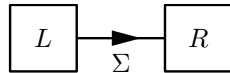
Dans cette définition, les variables  $T$  dénotent les degrés de liberté fondamentaux de la techni-théorie, et  $\mathcal{L}_{TT}$  son lagrangien. Du fait des interactions fortes, les variables  $T$  sont inappropriées pour décrire la physique à basse énergie. La LEET utilise comme champs dynamiques les trois GBs décrivant la brisure  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \rightarrow SU(2)_{L+R} \times U(1)_{B-L}$ , et les éventuels doublets de fermions composites  $\chi^\bullet$  produits par la techni-théorie.

### 6.1.1 Secteur composite

Les notations sont celles du chapitre 5: les trois GBs paramétrés par la matrice  $SU(2)$  se transforment selon

$$\Sigma \mapsto L \Sigma R^\dagger, \quad (6.2)$$

ce qui est représenté à la figure 6.1.



**Figure 6.1.** Propriétés de transformation des GBs.

La techni-théorie peut éventuellement produire des états légers de spin 1/2: des fermions composites chiraux. Ceux-ci se transformeront sous les symétries globales  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ . En incluant ces fermions chiraux dans la LEET, nous supposons implicitement que leurs masses sont inférieures à l'échelle  $\Lambda$  à laquelle les autres états composites apparaîtront: ceci peut être justifié [tH79a] dans le cas où ils participent au raccordement des anomalies. C'est pour cette raison que nous incluons un doublet de fermions composites dans cette discussion des anomalies, par souci de généralité. Les projections de chiralités gauche et droite sont définies par

$$\chi_{L,R}^\bullet = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \chi^\bullet. \quad (6.3)$$

1. Remarquons qu'en QCD, le coefficient de l'anomalie globale est proportionnel à  $N_c$ .

Nous avons déjà donné à la section 2.4.2.2 le comptage de puissances pour les fermions chiraux: celui-ci ne dépend pas du fait que les fermions soient composites ou élémentaires, et l'on a

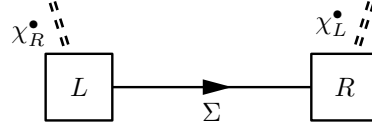
$$\chi^\bullet = \mathcal{O}(p^{1/2}). \quad (6.4)$$

On suppose à présent que ces fermions possèdent les propriétés de transformation suivantes <sup>2</sup>, qui sont schématisées à la figure 6.2 <sup>3</sup>

$$\chi_L^\bullet \mapsto R e^{-i\frac{B-L}{2}\alpha^0} \chi_L^\bullet, \quad (6.5)$$

$$\chi_R^\bullet \mapsto L e^{-i\frac{B-L}{2}\alpha^0} \chi_R^\bullet. \quad (6.6)$$

Rappelons que la charge vectorielle du doublet sous la symétrie  $U(1)_{B-L}$  est *a priori* libre de prendre une valeur quelconque pour ces fermions composites.



**Figure 6.2.** Propriétés de transformation des fermions composites.

Le lagrangien le plus général invariant sous  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$  est donné par

$$\mathcal{L}_{\text{comp.}} = \mathcal{L}_{\text{SB}} + \mathcal{L}_\bullet, \quad (6.7)$$

où les termes d'ordre dominant  $\mathcal{O}(p^2)$  impliquant les fermions composites sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\bullet = & i \overline{\chi^\bullet} \gamma^\mu D_\mu \chi^\bullet + i \delta_L \overline{\chi_L^\bullet} \gamma^\mu (\Sigma^\dagger D_\mu \Sigma) \chi_L^\bullet + i \delta_R \overline{\chi_R^\bullet} \gamma^\mu (\Sigma D_\mu \Sigma^\dagger) \chi_R^\bullet \\ & + \text{interactions à quatre fermions}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

et les autres termes sont regroupés dans  $\mathcal{L}_{\text{SB}}$

$$\mathcal{L}_{\text{SB}} = \frac{f^2}{4} \langle D_\mu \Sigma D^\mu \Sigma^\dagger \rangle + \mathcal{O}(p^4). \quad (6.9)$$

Avec cette description, nous pouvons donner la représentation à basse énergie de la fonctionnelle génératrice définie en (6.1)

$$e^{i\Gamma[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]} = \int d[\Sigma] d[\chi^\bullet] e^{i\int dx \mathcal{L}_{\text{comp.}}[\chi^\bullet, \Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]}. \quad (6.10)$$

Nous verrons que la variation anormale de la fonctionnelle génératrice sera d'ordre  $\mathcal{O}(p^4)$ . Les contributions à la variation anormale à cet ordre  $\mathcal{O}(p^4)$  sont dues d'une part à la variation des termes bosoniques  $\mathcal{O}(p^4)$  de  $\mathcal{L}_{\text{SB}}$  (6.9), d'autre part aux termes fermioniques  $\mathcal{O}(p^2)$  contenus dans  $\mathcal{L}_\bullet$  donné en (6.8): la variation du déterminant correspondant aux termes fermioniques  $\mathcal{O}(p^2)$  est en effet d'ordre  $\mathcal{O}(p^4)$ . Si l'on considère la variation anormale à l'ordre  $\mathcal{O}(p^4)$ , on peut donc omettre tous les termes d'ordre supérieur ou égal à  $\mathcal{O}(p^6)$  dans  $\mathcal{L}_{\text{SB}}$ , ainsi que tous les termes fermioniques de ce même  $\mathcal{L}_{\text{SB}}$ , y compris ceux d'ordre  $\mathcal{O}(p^4)$ . Nous nous placerons dans cette approximation pour toute la suite. Pour la suite, on définit donc  $\mathcal{L}_{\text{comp.}}$  et  $\mathcal{L}_{\text{SB}}$  comme ne comportant que les termes  $\mathcal{O}(p^2)$  et les termes bosoniques  $\mathcal{O}(p^4)$ .

2. D'autres choix pour les propriétés de transformation seront mentionnés à la fin de la section 6.2.3. Ils ne seront pas intéressants du point de vue du raccordement des anomalies, et ne seront donc pas considérés plus avant.

3. Nous attirons l'attention du lecteur sur l'attribution des indices  $L$  et  $R$  dans les équations (6.5-6.6), qui risque de lui compliquer la tâche dans ce chapitre. Ce que l'on pourrait prendre pour de la malveillance est en réalité la conséquence d'un long enchaînement de choix de notations plus ou moins heureux sur lesquels nous ne souhaitons pas nous étendre.

Ici encore, les interactions à quatre fermions sont supprimées par une échelle qui n'est pas nécessairement liée à l'échelle  $\Lambda \sim 4\pi f$ , mais peut être arbitrairement grande, et nous les omettons donc dans la suite. Etant données les charges des fermions (6.5-6.6), la dérivée covariante apparaissant dans (6.8) est donnée par

$$D_\mu \chi^\bullet = \partial_\mu \chi^\bullet - i \left\{ \frac{B-L}{2} B_\mu^0 + \frac{1-\gamma_5}{2} R_\mu + \frac{1+\gamma_5}{2} L_\mu \right\} \chi^\bullet. \quad (6.11)$$

Les propriétés de transformation des différentes connexions sont les mêmes qu'au chapitre 5

$$L_\mu \mapsto L L_\mu L^\dagger + i L \partial_\mu L^\dagger, \quad (6.12)$$

$$R_\mu \mapsto R R_\mu R^\dagger + i R \partial_\mu R^\dagger, \quad (6.13)$$

$$B_\mu^0 \mapsto B_\mu^0 - \partial_\mu \alpha^0. \quad (6.14)$$

Notons à ce stade une première différence avec les fermions élémentaires: on peut ici construire un terme de masse invariant sans spurions (en réalité, nous n'avons pas encore eu à introduire les spurions jusqu'ici, puisque nous n'avons discuté que le secteur composite). On effectue par conséquent la modification suivante de (6.8)

$$\mathcal{L}_\bullet \rightarrow \mathcal{L}_\bullet - m (\overline{\chi_R^\bullet} \Sigma \chi_L^\bullet + \overline{\chi_L^\bullet} \Sigma^\dagger \chi_R^\bullet). \quad (6.15)$$

À ce niveau, rien ne force le coefficient  $m$  à être petit. Pour retrouver la formule de comptage de Weinberg, il faudrait pouvoir comptabiliser le dernier terme dans (6.15) comme étant d'ordre  $\mathcal{O}(p^2)$ , soit une masse d'ordre  $\mathcal{O}(p^1)$ . Ce point est directement lié à la nécessité de protéger les masses de ces fermions composites pour les inclure dans la théorie effective. Nous utiliserons donc le comptage

$$m = \mathcal{O}(p^1). \quad (6.16)$$

Remarquons que les différences de masses entre composantes des doublets sont interdites par la symétrie  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$  à cet ordre où les spurions n'interviennent pas explicitement. Les opérateurs multipliés par les constantes libres  $\delta_L, \delta_R$  dans (6.8) ont déjà été introduits dans la littérature [ABCH85, PZ90]: la présence de tels couplages non-standard que nous avons mentionnés précédemment est due à la réalisation non-linéaire de la symétrie<sup>4</sup>.

Nous reprenons à présent les résultats essentiels du chapitre 5 concernant le couplage au secteur élémentaire.

### 6.1.2 Couplage au secteur élémentaire

Les notations et définitions sont celles du chapitre 5: on introduit les champs de Yang-Mills de  $SU(2)_{G_0} \times SU(2)_{G_1}$ , sous lesquels les fermions élémentaires se transforment selon

$$\chi_L \mapsto {}^t \chi_L = G_1 e^{-i \frac{B-L}{2} \alpha^0} \chi_L, \quad (6.17)$$

$$\chi_R \mapsto {}^t \chi_R = G_0 e^{-i \frac{B-L}{2} \alpha^0} \chi_R. \quad (6.18)$$

Ceci est représenté à la figure 6.3, qui montre le secteur composite et le secteur élémentaire découplés, c'est-à-dire avant l'introduction des spurions: le groupe d'invariance est

$$S_{\text{naturel}} = SU(2)_{G_0} \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_{G_1} \times U(1)_{B-L}. \quad (6.19)$$

Le lagrangien décrivant le secteur élémentaire à l'ordre dominant  $\mathcal{O}(p^2)$  est donné par

$$\mathcal{L}_{\text{élé.}} = \mathcal{L}_{\text{YM}} + i \overline{\chi} \gamma^\mu D_\mu \chi + \text{interactions à quatre fermions}, \quad (6.20)$$

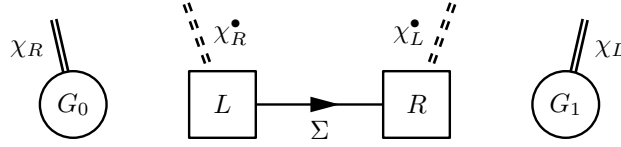
avec

$$D_\mu \chi = \partial_\mu \chi - i \left\{ \frac{B-L}{2} B_\mu^0 + \frac{1-\gamma_5}{2} g_1 G_{1\mu} + \frac{1+\gamma_5}{2} g_0 G_{0\mu} \right\} \chi, \quad (6.21)$$

4. Les opérateurs correspondants dans le cas des fermions élémentaires ont été donnés en (5.131-5.132) et n'apparaissent qu'à l'ordre  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^2 \zeta^0)$ .

et

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2} \langle G_{0\mu\nu} G_0^{\mu\nu} \rangle - \frac{1}{2} \langle G_{1\mu\nu} G_1^{\mu\nu} \rangle. \quad (6.22)$$



**Figure 6.3.** Les secteurs composite et élémentaire découplés.

La description du lagrangien effectif en termes de deux lagrangiens séparés selon

$$\mathcal{L}_{\text{tot.}} = \mathcal{L}_{\text{comp.}} + \mathcal{L}_{\text{élem.}}. \quad (6.23)$$

n'est valable qu'aux ordres n'impliquant pas explicitement les spurions: en effet, dès que l'on introduit les spurions, on peut construire des termes mélangeant des champs élémentaires et composites <sup>5</sup>.

A ce stade, on doit introduire les couplages entre les deux secteurs, à travers les spurions qui possèdent les propriétés de transformations données précédemment <sup>6</sup>

$$X \mapsto R X G_1^\dagger, \quad (6.24)$$

$$\tilde{Y} \mapsto G_0 \tilde{Y} L^\dagger, \quad (6.25)$$

$$\phi \mapsto G_0 e^{i\frac{\alpha_0}{2}} \phi. \quad (6.26)$$

Le spurion  $X$  satisfait à la relation

$$X_c = X. \quad (6.27)$$

On impose ensuite les contraintes

$$D_\mu X = \partial_\mu X - i R_\mu X + i g_1 X G_{1\mu} = 0, \quad (6.28)$$

$$D_\mu \tilde{Y} = \partial_\mu \tilde{Y} - i g_0 G_{0\mu} \tilde{Y} + i \tilde{Y} L_\mu = 0, \quad (6.29)$$

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - i g_0 G_{0\mu} \phi + i \frac{B_\mu^0}{2} \phi = 0. \quad (6.30)$$

La contrainte (6.29) implique que l'on peut écrire  $\tilde{Y}$  en fonction des constantes  $\varphi_Y$  et  $\alpha_Y$

$$\tilde{Y} = e^{i\varphi_Y} (\cos \alpha_Y Y_u + \sin \alpha_Y Y_{uc}), \quad (6.31)$$

avec  $Y_u$  la solution de (6.29) obéissant à

$$Y_u Y_{uc}^\dagger = 0, \quad (6.32)$$

$$\phi^\dagger Y_{uc} = 0. \quad (6.33)$$

Nous rappelons ici les relations utiles concernant la jauge standard: on peut trouver une jauge dans laquelle les spurions se réduisent aux constantes réelles suivantes

$$X \stackrel{\text{j. s.}}{=} \xi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.34)$$

$$Y_u \stackrel{\text{j. s.}}{=} \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.35)$$

$$\phi \stackrel{\text{j. s.}}{=} \begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.36)$$

5. D'autre part, nous avons vu au chapitres 4 et 5 que les contraintes sur les spurions ont des conséquences y compris au niveau du lagrangien  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0 \zeta^0)$  (alignement du vide sélectionnant le groupe de jauge dynamique).

6. Les formules (6.24) à (6.42) ont déjà été données au long du chapitre 5: elles sont condensées ici pour faciliter la lecture du présent chapitre.

Les constantes  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$  sont considérées comme petites, avec le comptage de puissance

$$\xi, \eta = \mathcal{O}(\epsilon), \quad (6.37)$$

$$\zeta \ll \epsilon. \quad (6.38)$$

La jauge standard dans laquelle les relations (6.34-6.36) sont valables est atteinte en appliquant une transformation  $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$  ainsi qu'une transformation  $SU(2)_{G_0} \times SU(2)_L/U(1)_{L+G_0, \tau^3}$ . Ceci implique qu'il reste une liberté de jauge  $SU(2) \times U(1)$ . En effet, dans la jauge standard, les connexions sont identifiées du fait des contraintes (6.28-6.30), pour donner

$$R_\mu \stackrel{j. s.}{=} g_1 G_{1\mu}, \quad (6.39)$$

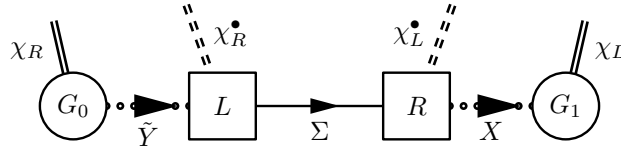
$$L_\mu^{1,2} \stackrel{j. s.}{=} G_{0\mu}^{1,2} \stackrel{j. s.}{=} 0, \quad (6.40)$$

$$L_\mu^3 \stackrel{j. s.}{=} B_\mu^0 \stackrel{j. s.}{=} g_0 G_{0\mu}^3 \stackrel{j. s.}{=} g_0 b_\mu^0. \quad (6.41)$$

Dans la dernière équation, nous avons utilisé la notation  $b_\mu^0$  pour le champ dynamique  $U(1)_Y$ . La solution des contraintes dans la jauge standard est invariante sous

$$S_{\text{réduit}} = SU(2)_w \times U(1)_Y. \quad (6.42)$$

Les transformations des champs sont représentées à la figure 6.4.



**Figure 6.4.** Les secteurs composite et élémentaire couplés.

Le lagrangien effectif donnant une contribution  $\mathcal{O}(p^4 \epsilon^0 \zeta^0)$  aux anomalies a été donné en (6.23). Nous avons vu au chapitre 5 comment en extraire les interactions en utilisant la solution des contraintes dans la jauge standard. Appliquant la même méthode aux interactions des fermions composites, on trouve que les dérivées covariantes sont données par les mêmes expressions que celles des fermions élémentaires (5.124-5.125), ce qui est la raison de notre choix pour les transformations (6.5-6.6)

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \chi_L^\bullet &\equiv D_\mu \chi_L^\bullet|_{j. s.} \\ &= \partial_\mu \chi_L^\bullet - i \left( g_1 G_{1\mu} + g_0 \frac{B-L}{2} b_\mu^0 \right) \chi_L^\bullet, \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \chi_R^\bullet &\equiv D_\mu \chi_R^\bullet|_{j. s.} \\ &= \partial_\mu \chi_R^\bullet - i g_0 \left( \frac{\tau^3}{2} + \frac{B-L}{2} \right) b_\mu^0 \chi_R^\bullet. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Ceci ne signifie cependant pas que les couplages des fermions composites sont identiques à ceux des fermions élémentaires, puisque les constantes libres  $\delta_L, \delta_R$  dans (6.8) donnent d'autres interactions avec les bosons vecteurs. On a en effet, dans la jauge standard

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{tot.}} \stackrel{j. s.}{=} & \frac{f^2}{4} \langle \nabla_\mu \Sigma \nabla^\mu \Sigma^\dagger \rangle - \frac{1}{2} \langle G_{1\mu\nu} G_1^{\mu\nu} \rangle - \frac{1}{4} b_{\mu\nu}^0 b^{0\mu\nu} + i \bar{\chi} \gamma^\mu \nabla_\mu \chi \\ & + i \bar{\chi}^\bullet \gamma^\mu \nabla_\mu \chi^\bullet + \delta_L \bar{\chi}_L^\bullet \gamma^\mu \left( i \Sigma^\dagger \partial_\mu \Sigma + g_0 b_\mu^0 \Sigma^\dagger \frac{\tau^3}{2} \Sigma - g_1 G_{1\mu} \right) \chi_L^\bullet \\ & + \delta_R \bar{\chi}_R^\bullet \gamma^\mu \left( i \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger + g_1 \Sigma G_{1\mu} \Sigma^\dagger - g_0 b_\mu^0 \frac{\tau^3}{2} \right) \chi_R^\bullet. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Les termes d'interactions non-standards sont donc spécifiques aux fermions composites. Il semblerait ainsi que de tels fermions soient exclus par les expériences testant l'universalité des couplages des fermions de chiralité gauche, ainsi que l'absence de couplages des fermions de chiralité droite aux bosons  $W^\pm$ . On peut cependant imaginer une situation dans laquelle ces fermions composites constituent une quatrième génération (éventuellement incomplète, dans le sens où la somme de  $B - L$  peut être différente de zéro, voir section 6.3.1) en plus des trois connues. Pour expliquer l'absence de tests expérimentaux, on doit supposer que leurs masses sont plus grandes que celles des fermions connus. Nous avons déjà remarqué, avec l'équation (6.15), que leurs masses ne sont pas automatiquement supprimées par des puissances des spurions. Une autre caractéristique de ces fermions composites est que, puisque la différence de masses au sein du doublet ne peut apparaître qu'à l'ordre  $\mathcal{O}(p^1 \epsilon^2 \zeta^0)$ , le rapport entre la différence de masses dans un doublet et la masse moyenne sera plus petit que pour les fermions élémentaires, pour lesquels ce rapport est d'ordre unité. Une dernière remarque est nécessaire concernant la distinction entre fermions composites et élémentaires: étant donné que la multiplication de l'un des deux par un spurion donne un champ se transformant comme l'autre type de fermion

$$\delta\chi_L^\bullet = X\chi_L, \quad (6.46)$$

$$\delta\chi_R^\bullet = Y_{u,c}^\dagger \chi_R, \quad (6.47)$$

le mélange entre les deux est possible. Cependant, cet effet apparaîtra aux ordres supérieurs en puissances des spurions, et la distinction a donc un sens.

Nous avons déjà vu au chapitre 5 que la présente théorie effective conduisait, à l'ordre  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0 \zeta^0)$  et en l'absence d'anomalies et de fermions composites, à la brisure électrofaible et aux mêmes relations en arbres que dans le cas du SM sans Higgs physique. Dans la suite, nous considérons les modifications apportées par la présence d'anomalies et de possibles fermions composites.

## 6.2 Anomalies dans la techni-théorie et dans la LEET

Dans cette section, nous discutons le raccordement des anomalies entre la LEET et la techni-théorie. Pour ces considérations, le secteur élémentaire et la symétrie de Yang-Mills  $SU(2)_{G_0} \times SU(2)_{G_1}$  n'interviennent pas, ni les spurions. Par contre, l'analyse prend en compte les fermions composites: nous utilisons une description en terme de la seule symétrie  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ , c'est-à-dire au niveau de la fonctionnelle génératrice  $\Gamma[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  définie en (6.1) et de son approximation (6.10) en termes des variables de basse énergie.

### 6.2.1 Anomalies des courants de symétrie de basse énergie de la techni-théorie

Nous considérons les courants de Noether  $J_L^{a\mu}, J_R^{a\mu}, J_{B-L}^\mu$  de la techni-théorie: ils correspondent aux symétries globales agissant sur les champs de basse énergie. Nous étudions les fonctions de Green de ces courants, dénotant par  $t$  une transformation générique du groupe  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ , paramétrée par les sept fonctions  $\alpha = \alpha^a \tau^a / 2$ ,  $\beta = \beta^a \tau^a / 2$  et  $\alpha^0$  selon

$$t = \left( L = e^{i(\alpha - \beta)}, R = e^{i(\alpha + \beta)}, \alpha^0 \right). \quad (6.48)$$

Sous une transformation  $t$ , les sources sont modifiées suivant

$$L_\mu \mapsto {}^t L_\mu = L L_\mu L^\dagger + i L \partial_\mu L^\dagger, \quad (6.49)$$

$$R_\mu \mapsto {}^t R_\mu = R R_\mu R^\dagger + i R \partial_\mu R^\dagger, \quad (6.50)$$

$$B_\mu^0 \mapsto {}^t B_\mu^0 = B_\mu^0 - \partial_\mu \alpha^0. \quad (6.51)$$

Il est utile à ce point d'introduire un opérateur différentiel reproduisant la version infinitésimale de ces transformations. Pour la suite du raisonnement, nous souhaitons cependant que cet opérateur agisse également directement sur les modes de Goldstone  $\{\pi^a | a = 1, 2, 3\}$ , et non indirectement *via* les équations de mouvement et l'expression de leur solution en fonction des sources comme cela a été utilisé dans la littérature [GL85]. On utilise pour cela l'écriture

$$\Sigma = e^{-i \frac{\pi^a \tau^a}{f}} = \cos \hat{\pi} - i \frac{\pi}{f \hat{\pi}} \sin \hat{\pi}, \quad (6.52)$$



où nous avons utilisé les définitions  $\pi = \pi^a \tau^a$  et  $\hat{\pi} = \sqrt{\pi^a \pi^a} / f$ . On définit l'opérateur différentiel  $D(\alpha, \beta, \alpha^0)$  agissant sur une fonctionnelle  $f[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  par

$$\begin{aligned} & D(\alpha, \beta, \alpha^0) f[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] \\ &= \int dx \left\{ -(\alpha^a + \beta^a) \partial_\mu + i[\alpha + \beta, R_\mu]^a \right\} \frac{\delta f}{\delta R_\mu^a(x)} + \left\{ -(\alpha^a - \beta^a) \partial_\mu + i[\alpha - \beta, L_\mu]^a \right\} \frac{\delta f}{\delta L_\mu^a(x)} \\ &+ \int dx \alpha^0 \partial_\mu \frac{\delta f}{\delta B_\mu^0(x)} \\ &+ \int dx \left\{ i[\alpha, \pi]^a - \frac{f \hat{\pi}}{\sin(\hat{\pi})} \left( -\beta^a \cos \hat{\pi} + \beta^b \frac{\pi^b \pi^a}{f^2 \hat{\pi}^2} \left( \cos \hat{\pi} - \frac{1}{\hat{\pi}} \sin \hat{\pi} \right) \right) \right\} \frac{\delta f}{\delta \pi^a(x)}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

On peut vérifier explicitement que ceci redonne le résultat désiré

$$e^{D(\alpha, \beta, \alpha^0)} f[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = f[t\Sigma, {}^tL_\mu, {}^tR_\mu, {}^tB_\mu^0]. \quad (6.54)$$

Nous décrivons à présent la construction de Wess-Zumino en détails, avant de considérer ses généralisations dans la suite: on exprime la variation de la fonctionnelle génératrice  $\Gamma[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  sous l'action de l'opérateur  $D(\alpha, \beta, \alpha^0)$  défini en (6.53), telle qu'elle peut être déduite lorsque l'on applique une transformation  $t$  aux champs  $T$  de (6.1). Le facteur numérique apparaissant en coefficient devant la variation en question dépend du contenu de la techni-théorie en champs fermioniques, qui constituent un sous-ensemble des champs  $T$ . Supposant que les transformations du groupe  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$  sont réalisées linéairement sur ces champs fondamentaux, on peut écrire la variation de la fonctionnelle génératrice en fonction de la variation standard de Bardeen [Adl69, Bar69, AB69, Fuj79, Fuj80, BMNT82, GL84, Tsu89] selon

$$D(\alpha, \beta, \alpha^0) \Gamma[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = -k_{\text{TT}} \int dx \langle \beta \Omega[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] \rangle, \quad (6.55)$$

où la fonctionnelle de Bardeen prend la forme simple suivante pour le groupe  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$  [Kai01]

$$\Omega[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = \frac{1}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\mu\nu}^0 (\partial_\rho L_\sigma + \partial_\rho R_\sigma - i[R_\rho, L_\sigma]). \quad (6.56)$$

Cette fonctionnelle est d'ordre  $\mathcal{O}(p^4)$

$$\Omega[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = \mathcal{O}(p^4). \quad (6.57)$$

Notons que la constante  $k_{\text{TT}}$  apparaissant en facteur dans (6.55) est la seule inconnue dans cette expression, et dépend du contenu de la techni-théorie. Pour une théorie du type de la QCD, on aurait au lieu de  $k_{\text{TT}}$  la constante  $N_c/3$ , où  $N_c$  est le nombre de couleurs, et la division par trois est due à la normalisation du nombre baryonique pour les quarks. Nous reviendrons sur la valeur de la constante  $k_{\text{TT}}$  à la section 6.3.1.

On peut vérifier, utilisant la relation (6.54), que la fonctionnelle de Bardeen apparaissant dans la variation (6.56) vérifie les conditions d'intégrabilité de Wess-Zumino [WZ71], qui traduisent les relations de commutation de l'algèbre

$$D\left(\frac{\tau^a}{2}, 0, 0\right) \Omega^b[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = \varepsilon^{abc} \Omega^c[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0], \quad (6.58)$$

$$\varepsilon^{abc} D\left(0, \frac{\tau^a}{2}, 0\right) \Omega^b[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = 0, \quad (6.59)$$

$$D(0, 0, \alpha^0) \Omega[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = 0. \quad (6.60)$$

Ces conditions signifient que la variation (6.55) peut être intégrée, c'est-à-dire que l'on peut trouver une action de Wess-Zumino  $S_{\text{WZ}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  fonctions des GBs, telle que l'on ait

$$D(\alpha, \beta, \alpha^0) S_{\text{WZ}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = - \int dx \langle \beta \Omega[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] \rangle. \quad (6.61)$$

L'action appropriée est obtenue par intégration de l'équation différentielle (6.58). Fixant par exemple la condition limite suivante

$$S_{\text{WZ}}[\mathbb{1}, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = 0, \quad (6.62)$$

on obtient, par la construction standard de Wess-Zumino [WZ71]<sup>7</sup>, une contribution  $\mathcal{O}(p^4)$  à l'action

$$\begin{aligned} S_{\text{WZ}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] &= -\frac{1}{32\pi^2} \int dx \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\mu\nu}^0 \langle \Sigma R_\rho \Sigma^\dagger L_\sigma - R_\rho L_\sigma - i \Sigma^\dagger (\partial_\rho \Sigma) (R_\sigma + \Sigma^\dagger L_\sigma \Sigma) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{48\pi^2} \int dx \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_\mu^0 \langle \Sigma^\dagger (\partial_\nu \Sigma) \Sigma^\dagger (\partial_\rho \Sigma) \Sigma^\dagger (\partial_\sigma \Sigma) \rangle. \end{aligned} \quad (6.63)$$

A partir de cette expression explicite, on peut vérifier que l'application sur  $S_{\text{WZ}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  de l'opérateur différentiel  $D(\alpha, \beta, \alpha^0)$  défini en (6.53) reproduit bien la variation désirée (6.61).

Etant donné que cette variation est indépendante des champs  $\pi^a$ , et que la mesure d'intégration sur les champs de Goldstone est invariante sous les transformations  $t$ , on obtient directement la variation de la fonctionnelle génératrice. Le résultat est donc le suivant: à l'action invariante sous les transformations  $t$ , on ajoute le terme non-invariant  $S_{\text{WZ}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$ , multiplié par la constante  $k_{\text{TT}}$ . Ceci fournit une représentation à basse énergie de la fonctionnelle génératrice  $\Gamma[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  qui reproduit la variation (6.55) déduite de la techni-théorie. On résout ainsi la question du raccordement des anomalies dans le cas standard où les seuls états physiques légers sont les GBs.

Si la techni-théorie produit des fermions composites, ceux-ci vont également contribuer à la variation anormale de la fonctionnelle génératrice telle qu'elle est décrite à basse énergie. Nous discutons maintenant cette contribution, ainsi que sa dépendance sur les couplages non-standard  $\delta_L, \delta_R$  ainsi que sur les charges  $U(1)_{B-L}$  des fermions composites.

### 6.2.2 Variation du déterminant des fermions composites

Du point de vue de la LEET, il existe une contribution des fermions composites [BYS80, FSBY81] à la variation anormale de la fonctionnelle génératrice  $\Gamma[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$ . Considérant un doublet  $\chi^\bullet$  de fermions composites tels qu'introduit à la section 6.1.1, on définit pour condenser les écritures l'opérateur  $\hat{\mathcal{D}}_\bullet$  dépendant uniquement de sept sources vectorielles  $\{\hat{L}_\mu^a, \hat{R}_\mu^a, B_\mu^0\}$  par la relation

$$\hat{\mathcal{D}}_\bullet[\hat{L}_\mu, \hat{R}_\mu, B_\mu^0] \chi^\bullet = \gamma^\mu \left\{ i \partial_\mu + \frac{B-L}{2} B_\mu^0 + \frac{1-\gamma_5}{2} \hat{R}_\mu + \frac{1+\gamma_5}{2} \hat{L}_\mu \right\} \chi^\bullet. \quad (6.64)$$

Définissant à partir des connexions  $L_\mu$  et  $R_\mu$  les objets portant des chapeaux selon

$$\hat{L}_\mu = L_\mu + i \delta_R \Sigma D_\mu \Sigma^\dagger, \quad (6.65)$$

$$\hat{R}_\mu = R_\mu + i \delta_L \Sigma^\dagger D_\mu \Sigma, \quad (6.66)$$

on peut écrire le lagrangien  $\mathcal{O}(p^2)$  (donné en (6.8)) pour les fermions composites sous la forme

$$\mathcal{L}_\bullet = \overline{\chi^\bullet} \hat{\mathcal{D}}_\bullet \chi^\bullet. \quad (6.67)$$

Nous n'avons pas inclus les termes de Yukawa car ils ne jouent pas de rôle du point de vue des anomalies. Ils peuvent donc être rétablis sous la forme de perturbations. Notons que les propriétés de transformation des sources portant des chapeaux sont identiques à celles des sources originales

$$\hat{L}_\mu \mapsto {}^t \hat{L}_\mu = L \hat{L}_\mu L^\dagger + i L \partial_\mu L^\dagger, \quad (6.68)$$

$$\hat{R}_\mu \mapsto {}^t \hat{R}_\mu = R \hat{R}_\mu R^\dagger + i R \partial_\mu R^\dagger. \quad (6.69)$$

De ceci, on peut déduire l'expression pour la variation du déterminant fermionique à l'ordre  $\mathcal{O}(p^4)$  lorsque l'on applique une telle transformation  $t$ . Cette variation est exprimée comme suit

$$-i D(\alpha, \beta, \alpha^0) \ln \text{Det } \hat{\mathcal{D}}_\bullet[\hat{L}_\mu, \hat{R}_\mu, B_\mu^0] = (B-L) \int dx \langle \beta \Omega[\hat{L}_\mu, \hat{R}_\mu, B_\mu^0] \rangle. \quad (6.70)$$

<sup>7</sup>. Dans ce cas  $SU(2)$ , il n'est pas nécessaire d'introduire une cinquième dimension compacte: l'action de Wess-Zumino est l'intégrale d'un lagrangien ordinaire sur l'espace-temps quadri-dimensionnel.

Dans ce dernier résultat, on retrouve la même fonctionnelle de Bardeen  $\Omega$  que dans l'équation (6.55), mais avec des arguments différents. On peut d'ailleurs effectuer la décomposition suivante

$$\Omega[\hat{L}_\mu, \hat{R}_\mu, B_\mu^0] = \Omega[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] + \Omega_{\delta_L, \delta_R}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0], \quad (6.71)$$

où  $\Omega_{\delta_L, \delta_R}$  s'annule lorsque  $\delta_L$  et  $\delta_R$  sont nuls

$$\begin{aligned} \Omega_{\delta_L, \delta_R}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] &= \frac{1}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\mu\nu}^0 \left\{ \delta_R (i \partial_\rho (\Sigma D_\sigma \Sigma^\dagger) + [R_\rho, \Sigma D_\sigma \Sigma^\dagger]) \right. \\ &\quad + \delta_L (i \partial_\rho (\Sigma^\dagger D_\sigma \Sigma) + [L_\rho, \Sigma^\dagger D_\sigma \Sigma]) \\ &\quad \left. + i \delta_L \delta_R [\Sigma^\dagger D_\rho \Sigma, \Sigma D_\sigma \Sigma^\dagger] \right\}. \end{aligned} \quad (6.72)$$

On peut également voir, d'après les propriétés de transformation de  $\hat{L}_\mu$  et  $\hat{R}_\mu$  données en (6.68-6.69), que la variation de Bardeen obtenue en (6.70) satisfait également aux conditions d'intégrabilité de Wess-Zumino, soit

$$D\left(\frac{\tau^a}{2}, 0, 0\right) \Omega^b[\hat{L}_\mu, \hat{R}_\mu, B_\mu^0] = \varepsilon^{abc} \Omega^c[\hat{L}_\mu, \hat{R}_\mu, B_\mu^0], \quad (6.73)$$

$$\varepsilon^{abc} D\left(0, \frac{\tau^a}{2}, 0\right) \Omega^b[\hat{L}_\mu, \hat{R}_\mu, B_\mu^0] = 0, \quad (6.74)$$

$$D(0, 0, \alpha^0) \Omega[\hat{L}_\mu, \hat{R}_\mu, B_\mu^0] = 0. \quad (6.75)$$

Notons que l'action de l'opérateur  $D(\alpha, \beta, \alpha^0)$  sur les champs de Goldstone  $\pi^a$  entre ici en jeu, à la différence de (6.58-6.59). En fait, on peut aussi voir les choses ainsi: la partie non-standard  $\Omega_{\delta_L, \delta_R}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  de la variation donnée en (6.72) satisfait par elle-même aux conditions de Wess-Zumino

$$D\left(\frac{\tau^a}{2}, 0, 0\right) \Omega_{\delta_L, \delta_R}^b[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = \varepsilon^{abc} \Omega_{\delta_L, \delta_R}^c[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0], \quad (6.76)$$

$$\varepsilon^{abc} D\left(0, \frac{\tau^a}{2}, 0\right) \Omega^b[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = 0, \quad (6.77)$$

$$D(0, 0, \alpha^0) \Omega_{\delta_L, \delta_R}[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = 0, \quad (6.78)$$

et ce quelles que soient les valeurs des constantes  $\delta_L, \delta_R$ . Ceci signifie à nouveau que l'on pourra construire un lagrangien du type de celui de Wess-Zumino, qui reproduira la variation non-standard  $\Omega_{\delta_L, \delta_R}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  elle-même. Nous aurons effectivement besoin d'une telle construction plus tard, et nous donnons donc l'expression finale de ce terme  $\mathcal{O}(p^4)$  ici

$$\begin{aligned} S_{\delta_L, \delta_R}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] &= -\frac{1}{32\pi^2} \int dx \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\mu\nu}^0 \left\langle i (\delta_L L_\rho - \delta_R R_\rho) (\Sigma^\dagger D_\sigma \Sigma + \Sigma D_\sigma \Sigma^\dagger) \right. \\ &\quad - (\delta_L - \delta_R) \partial_\rho \Sigma^\dagger D_\sigma \Sigma \\ &\quad \left. + \delta_L \delta_R (\Sigma^\dagger D_\rho \Sigma \Sigma D_\sigma \Sigma^\dagger - D_\rho \Sigma^\dagger D_\sigma \Sigma) \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.79)$$

On vérifie effectivement que ce lagrangien redonne la variation désirée de l'action effective

$$D(\alpha, \beta, \alpha^0) S_{\delta_L, \delta_R}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = - \int dx \left\langle \beta \Omega_{\delta_L, \delta_R}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] \right\rangle. \quad (6.80)$$

Pour fixer l'expression (6.79) de  $S_{\delta_L, \delta_R}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$ , nous avons choisi la condition limite suivante

$$S_{\delta_L, \delta_R}[\mathbb{1}, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = 0. \quad (6.81)$$

Ayant déterminé la contribution des fermions composites à la variation anormale de l'action effective, et constaté que cette variation dépend des constantes  $\delta_L, \delta_R$  et  $B - L$ , nous nous intéressons à présent à savoir si le raccordement des anomalies pose des restrictions sur ces constantes.

### 6.2.3 Raccordement des anomalies

A la section 6.2.1, nous avons obtenu la variation totale de la fonctionnelle génératrice  $\Gamma[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  telle qu'elle est déduite à partir des propriétés de la techni-théorie. Dans la même section, le lagrangien de Wess-Zumino standard a été présenté: lorsque celui-ci est ajouté au lagrangien effectif invariant sous les transformations  $t$ , la partie bosonique de la LEET reproduit à elle seule la variation anormale de la fonctionnelle génératrice.

La section 6.2.2 concernait la contribution des fermions composites à la variation du lagrangien effectif (puisque cette variation contient la matrice  $\Sigma$ , l'intégrale sur les GBs doit encore être effectuée). Dans le cas général, c'est la combinaison de cette variation (6.70) due aux fermions composites avec celle due aux GBs qui doit reproduire la variation (6.55) déduite de la techni-théorie. Le raccordement des anomalies consiste précisément en la recherche du lagrangien bosonique approprié, généralisant celui de Wess-Zumino. Dans notre cas, on doit également déterminer s'il y a ou non des restrictions sur les constantes  $\delta_L$ ,  $\delta_R$  et les charges  $U(1)_{B-L}$  des fermions composite.

Nous considérons donc la manière dont la variation de  $\Gamma[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  est reproduite dans la théorie effective. Intégrant sur les fermions composites dans l'écriture (6.10), on met la représentation pour la fonctionnelle génératrice sous la forme

$$e^{i\Gamma[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]} = \int d[\Sigma] e^{iS_{SB}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] + \ln \text{Det } \hat{\mathcal{D}}_\bullet[\hat{L}_\mu, \hat{R}_\mu, B_\mu^0]}, \quad (6.82)$$

avec la définition  $S_{SB} = \int dx \mathcal{L}_{SB}$ . La condition de raccordement des anomalies s'énonce comme suit: la variation de  $\Gamma[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  donnée par l'expression (6.82) doit être égale à celle de l'expression (6.55). Avec la notation

$${}^t D_\mu \Sigma \equiv \partial_\mu \Sigma - i {}^t L_\mu \Sigma + i \Sigma {}^t R_\mu, \quad (6.83)$$

on peut utiliser des réécritures pour obtenir la variation obtenue à partir de la LEET sous la forme

$$\begin{aligned} e^{D(\alpha, \beta, \alpha^0)} e^{i\Gamma[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]} &= \int d[\Sigma] e^{iS_{SB}[\Sigma, {}^t L_\mu, {}^t R_\mu, {}^t B_\mu^0] + \ln \text{Det } \hat{\mathcal{D}}_\bullet[{}^t \hat{L}_\mu + i\delta_R \Sigma {}^t D_\mu \Sigma^\dagger, {}^t \hat{R}_\mu + i\delta_L \Sigma^\dagger {}^t D_\mu \Sigma, {}^t B_\mu^0]} \\ &= \int d[{}^t \Sigma] e^{iS_{SB}[{}^t \Sigma, {}^t L_\mu, {}^t R_\mu, {}^t B_\mu^0] + \ln \text{Det } \hat{\mathcal{D}}_\bullet[{}^t \hat{L}_\mu, {}^t \hat{R}_\mu, {}^t B_\mu^0]} \\ &= \int d[{}^t \Sigma] e^{D(\alpha, \beta, \alpha^0)} e^{iS_{SB}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] + \ln \text{Det } \hat{\mathcal{D}}_\bullet[\hat{L}_\mu, \hat{R}_\mu, B_\mu^0]} \\ &= \int d[\Sigma] e^{D(\alpha, \beta, \alpha^0)} e^{iS_{SB}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] + \ln \text{Det } \hat{\mathcal{D}}_\bullet[\hat{L}_\mu, \hat{R}_\mu, B_\mu^0]}, \end{aligned} \quad (6.84)$$

où nous avons renommé les variables d'intégration, puis utilisé l'invariance de la mesure. C'est essentiellement cette propriété qui nous a permis de faire passer l'opérateur  $D(\alpha, \beta, \alpha^0)$  sous le signe d'intégration, bien qu'il agisse également sur les champs de Goldstone. Nous séparons à présent  $S_{SB}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  en deux parties selon

$$S_{SB}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = S_{\text{inv}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] + \hat{S}_{\text{WZ}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0], \quad (6.85)$$

où  $S_{\text{inv}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  est invariante sous les transformations  $t$ , tandis que  $\hat{S}_{\text{WZ}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  ne l'est pas, et commence à l'ordre  $\mathcal{O}(p^4)$ . On a donc

$$D(\alpha, \beta, \alpha^0) S_{\text{inv}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = 0. \quad (6.86)$$

Nous devons à présent déterminer quelle doit être sa variation, selon les valeurs de  $\delta_L, \delta_R$  et  $B-L$ , afin de satisfaire à la condition de raccordement des anomalies, si cela est possible. L'ambiguïté dans la séparation est éliminée en adoptant une condition limite. Nous choisissons ici

$$\hat{S}_{\text{WZ}}[\mathbb{1}, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = 0, \quad (6.87)$$

et cherchons donc à déterminer  $\hat{S}_{\text{WZ}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$ . Mentionnons en relation avec ce problème, qu'une question similaire a également été étudiée en termes géométriques dans [AGG85].

Retenant uniquement les termes linéaires en les paramètres  $\{\alpha, \beta, \alpha^0\}$  dans la relation (6.84), et utilisant la représentation à basse énergie (6.82) pour  $\Gamma[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$ , on obtient

$$0 = \int d[\Sigma] e^{iS_{\text{SB}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] + \ln \text{Det } \hat{\mathcal{D}}_\bullet[\hat{L}_\mu, \hat{R}_\mu, B_\mu^0]} X[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0], \quad (6.88)$$

avec la fonctionnelle  $X[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  définie par

$$\begin{aligned} X[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] &= D(\alpha, \beta, \alpha^0) \left\{ \hat{S}_{\text{WZ}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] - i \ln \text{Det } \hat{\mathcal{D}}_\bullet[\hat{L}_\mu, \hat{R}_\mu, B_\mu^0] \right\} \\ &\quad - D(\alpha, \beta, \alpha^0) \Gamma[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]. \end{aligned} \quad (6.89)$$

On peut voir, par récurrence dans le développement en puissances des sources de (6.88), que les coefficients du développement de  $X[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  doivent s'annuler. Pour ce qui nous concerne ici, on a donc

$$X[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = 0. \quad (6.90)$$

Ceci fournit, d'après la définition (6.89) de  $X[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$ , l'expression de la variation de  $\hat{S}_{\text{WZ}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  nécessaire pour satisfaire à la condition de raccordement des anomalies. En effet, injectant l'expression (6.55) pour la variation totale extraite de la techni-théorie ainsi que celle pour la variation du déterminant fermionique (6.70), on trouve

$$\begin{aligned} D(\alpha, \beta, \alpha^0) \hat{S}_{\text{WZ}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] &= -k_{\text{TT}} \int dx \langle \beta \Omega[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] \rangle \\ &\quad - (B - L) \int dx \langle \beta \Omega[\hat{L}_\mu, \hat{R}_\mu, B_\mu^0] \rangle. \end{aligned} \quad (6.91)$$

On peut également écrire cette variation en utilisant la séparation (6.71) de la fonctionnelle de Bardeen en une partie standard  $\Omega[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  et une partie non-standard  $\Omega_{\delta_L, \delta_R}[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$ . Ayant préalablement discuté les conditions de Wess-Zumino pour chacune des deux aux sections 6.2.1 et 6.2.2, nous pouvons à présent construire deux termes dans le lagrangien, reproduisant chacun l'une des variations séparément, pour toute valeur de  $\delta_L, \delta_R$ . Il ne nous reste plus ici qu'à prendre la combinaison linéaire appropriée

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\text{WZ}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] &= (k_{\text{TT}} + B - L) S_{\text{WZ}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] \\ &\quad + (B - L) S_{\delta_L, \delta_R}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]. \end{aligned} \quad (6.92)$$

D'après les conditions limites pour chacun des termes dans le membre de droite de cette équation, qui sont données en (6.62) et (6.81), notre construction vérifie automatiquement la condition (6.87). Ainsi, l'équation (6.92) fournit une action  $\hat{S}_{\text{WZ}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  satisfaisant (6.91), ce qui montre que la condition de raccordement des anomalies peut être satisfaite quelle que soient les valeurs des constantes  $\delta_L, \delta_R$  et  $B - L$ . Il n'y a donc pas de restrictions théoriques sur ces constantes.

Finalement, nous avons obtenu l'expression de l'extension du lagrangien de Wess-Zumino qui doit être ajoutée à la partie invariante du lagrangien pour obtenir la variation de la fonctionnelle génératrice. On pourra donc écrire avec les différents termes définis ci-dessus

$$e^{i\Gamma[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]} = \int d[\Sigma] e^{iS_{\text{inv}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] + i\hat{S}_{\text{WZ}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] + \ln \text{Det } \hat{\mathcal{D}}_\bullet[\hat{L}_\mu, \hat{R}_\mu, B_\mu^0]}. \quad (6.93)$$

Concernant les propriétés de transformation des fermions composites, mentionnons que les possibilités autres que celle considérée en (6.5-6.6) conduisent à un opérateur de Dirac invariant sous les transformations  $t$ , hormis la possibilité se bornant à échanger les transformations entre les deux chiralités. En effet, si les fermions composites ne se transforment pas de manière indépendante sous les transformations  $t$ , ils ne généreront pas de variation anormales. La raison initiale pour considérer ces fermions étant précisément d'étudier leur rôle dans la condition de raccordement des anomalies, on comprend que ces possibilités alternatives ne présentent pas d'intérêt ici.

## 6.3 Raccordement des anomalies dans une théorie sans particule de Higgs

Le travail effectué à la section précédente est suffisant si l'on s'intéresse à une théorie dans laquelle les GBs restent dans le spectre: nous y avons étudié le raccordement des anomalies dans le cas général, considérant également les fermions composites. On cherche à présent à savoir si les anomalies sont une obstruction au mécanisme de Higgs, au sens où elles pourraient être une entrave à l'élimination des GBs du spectre.

A ce stade, les champs de jauge  $G_{0\mu}$ ,  $G_{1\mu}$  introduits à la section 6.1.2 vont entrer en jeu. Cependant, les symétries que nous avons considérées jusqu'à présent en relation avec les anomalies ne sont pas directement celles agissant sur les champs de jauge: le couplage se fait *via* les spurions. Rappelons qu'il n'y a pas d'objection théorique avoir des symétries globales anomales, comme c'est le cas en QCD, où les anomalies globales doivent être reproduites en  $\chi$ PT. Cependant, nous sommes ici intéressés par les applications à l'EWSB, auquel cas les GBs donnent leurs masses aux bosons vecteurs  $W^\pm$  et  $Z^0$ . Nous demanderons précisément que ceci ait lieu dans la LEET: avec un choix approprié de variables, le lagrangien effectif ne doit plus dépendre des GBs.

La conclusion à laquelle nous aboutirons est la suivante: les symétries à basse énergie de la techni-théorie  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$  doivent être exemptes d'anomalies. Ce résultat concerne la techni-théorie elle-même, et il ne dépend pas de la présence de fermions composites. En réalité, les couplages non-standards  $\delta_L, \delta_R$  n'apparaîtront jamais dans les manipulations, la question étant au contraire immédiatement exprimée en termes du contenu de la techni-théorie en utilisant le résultat du raccordement des anomalies de la section précédente. Nous trouvons d'autre part que la trace de  $B-L$  sur les fermions élémentaires doit s'annuler.

### 6.3.1 Obstructions dans le secteur composite

Nous nous concentrons sur les redéfinitions des champs utilisées pour réécrire le lagrangien effectif sans occurrences des GBs, afin de vérifier si cet objectif est atteint. Dans cette section, nous tenons à nouveau compte de possibles fermions composites, mais pas des fermions élémentaires qui seront considérés à la section 6.3.2. Nous pouvons par conséquent formuler la question sans introduire explicitement les champs de jauge  $G_{0\mu}$  et  $G_{1\mu}$ .

Pour faciliter la discussion, nous travaillons au niveau où les fermions composites ont déjà été intégrés pour obtenir le déterminant de l'opérateur de Dirac. Ceci nous permet de nous concentrer tout d'abord sur le secteur bosonique. Nous reviendrons plus tard sur les redéfinitions des champs pour les fermions composites à la section 6.4. On définit l'action  $S[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  intervenant dans l'expression à basse énergie (6.93) de la fonctionnelle génératrice  $\Gamma[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  par

$$\begin{aligned} S[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] &= S_{\text{inv}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] + \hat{S}_{\text{WZ}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] \\ &\quad - i \ln \text{Det } \hat{\mathcal{D}}_\bullet[\hat{L}_\mu, \hat{R}_\mu, B_\mu^0]. \end{aligned} \quad (6.94)$$

Rappelons que la redéfinition à utiliser sera appliquée aux sources  $R_\mu^a$ , puisqu'elles sont identifiées aux trois champs dynamiques  $G_{1\mu}^a$  selon (6.39): une redéfinition impliquant ces sources pourra donc absorber les trois GBs, tandis que les sources  $L_\mu^a$  ne contiennent qu'un champ dynamique d'après (6.40). La redéfinition de ce seul champ ne permettrait pas d'absorber les trois degrés de liberté scalaires.

D'une part, la disparition supposée des GBs du spectre signifie que l'on peut écrire  $S[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  en fonction de sept sources vectorielles seulement. D'autre part, le raisonnement précédent montre que l'on n'a besoin de redéfinir uniquement les sources  $R_\mu^a$ . Afin d'avoir des variables invariantes sous la symétrie  $SU(2)_R$ , on utilise la redéfinition suivante <sup>8</sup>

$$g_1 W_\mu \equiv i \Sigma D_\mu \Sigma^\dagger = \Sigma R_\mu \Sigma^\dagger + i \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger - L_\mu, \quad (6.95)$$

puis on effectuera le changement de variables

$$\{\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0\} \rightarrow \{\Sigma, L_\mu, g_1 W_\mu, B_\mu^0\}. \quad (6.96)$$

8. Notons que l'écriture en jauge standard de cette définition redonne bien celle utilisé en (5.77).

La question est de savoir si, en termes de l'écriture générale

$$S[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = f[L_\mu, g_1 W_\mu, B_\mu^0] + h[\Sigma, L_\mu, g_1 W_\mu, B_\mu^0], \quad (6.97)$$

où la fonction  $h$  dépend *a priori* de  $\Sigma$ , on peut avoir

$$h[\Sigma, L_\mu, g_1 W_\mu, B_\mu^0] = 0. \quad (6.98)$$

De nouveau, nous imposons une condition limite, pour éviter les ambiguïtés dans la séparation (6.97)

$$h[\mathbb{1}, L_\mu, g_1 W_\mu, B_\mu^0] = 0. \quad (6.99)$$

On utilise ensuite le fait que (6.95) est formellement une transformation de jauge, c'est-à-dire que l'on peut écrire

$$g_1 W_\mu = {}^\omega R_\mu - L_\mu, \quad (6.100)$$

avec la transformation  $\omega$  suivante, dépendant des GBs

$$\omega = (L = \mathbb{1}, R = \Sigma, \alpha^0 = 0). \quad (6.101)$$

On sait que cette redéfinition serait efficace si l'action  $S[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  se réduisait au seul terme invariant de jauge  $S_{\text{inv}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  dans (6.94), puisque l'on a

$$S_{\text{inv}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = S_{\text{inv}}[\mathbb{1}, g_1 W_\mu + L_\mu, L_\mu, B_\mu^0]. \quad (6.102)$$

Notons que nous utilisons ici des redéfinitions des champs et non pas une fixation de jauge. Il n'y a donc pas de conflit entre ces manipulations et le fait que nous ayons ensuite à choisir une jauge particulière pour résoudre les contraintes sur les spurions comme à la section 6.1.2: les transformations de jauge nous servent ici uniquement d'outils pour déduire l'effet des redéfinitions des champs.

Considérons à présent les conséquences de ces redéfinitions sur l'action complète  $S[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$ , nous limitant tout d'abord au cas des champs de Goldstone  $\pi^a$  infinitésimaux, et utilisant le résultat du raccordement des anomalies, qui égale la variation de  $S[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  à celle obtenue en (6.55), soit

$$D(\alpha, \beta, \alpha^0) S[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = -k_{\text{TT}} \int dx \langle \beta \Omega[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] \rangle. \quad (6.103)$$

La version infinitésimale de la transformation chirale  $\omega$  donnée en (6.101) qui élimine les GBs du terme invariant est donnée par

$$\omega = \left( L = \mathbb{1}, R = 1 - i \frac{\pi}{f} + \mathcal{O}(\pi^2), \alpha^0 = 0 \right), \quad (6.104)$$

d'après la définition des  $\pi^a$  (6.52). Injectant (6.104) dans (6.103) et réarrangeant les termes, on obtient

$$\begin{aligned} S[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] &= S[\mathbb{1}, L_\mu, g_1 W_\mu + L_\mu, B_\mu^0] \\ &\quad - \frac{k_{\text{TT}}}{2f} \int dx \langle \pi \Omega[L_\mu, g_1 W_\mu + L_\mu, B_\mu^0] \rangle + \mathcal{O}(\pi^2). \end{aligned} \quad (6.105)$$

On peut identifier dans cette expression la partie indépendante des GBs dans la décomposition générale (6.97)

$$f[L_\mu, g_1 W_\mu, B_\mu^0] = S[\mathbb{1}, L_\mu, g_1 W_\mu + L_\mu, B_\mu^0], \quad (6.106)$$

ce qui montre que le développement de  $h$  en puissance commence par le terme linéaire suivant

$$h[\Sigma, L_\mu, g_1 W_\mu, B_\mu^0] = -\frac{k_{\text{TT}}}{2f} \int dx \langle \pi \Omega[L_\mu, g_1 W_\mu + L_\mu, B_\mu^0] \rangle + \mathcal{O}(\pi^2). \quad (6.107)$$

La seule possibilité pour que cette fonctionnelle soit indépendante des champs de Goldstone est donc d'avoir

$$k_{\text{TT}} = 0. \quad (6.108)$$

D'après (6.55), ceci signifie que les symétries de la techni-théorie qui agissent à basse énergie, c'est-à-dire le groupe  $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R \times \text{U}(1)_{B-L}$ , sont exemptes d'anomalies. Dans ce cas seulement peut-on effectivement se débarrasser des GBs dans le lagrangien effectif. Nous montrons à présent que ceci reste vrai pour des valeurs finies des champs  $\pi^a$ . On a en effet

$$\begin{aligned} S[\mathbb{1}, L_\mu, g_1 W_\mu + L_\mu, B_\mu^0] &= e^{D(\alpha, \beta, 0)} S[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] \Big|_{(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2f}, -\frac{\pi}{2f})} \\ &= S[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0], \end{aligned} \quad (6.109)$$

où, dans la dernière égalité, nous avons utilisé l'absence de variation anormale de  $S[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]$  dans (6.103) lorsque  $k_{\text{TT}} = 0$ . La fonctionnelle  $h[\Sigma, L_\mu, g_1 W_\mu, B_\mu^0]$  définie en (6.97) est donc identiquement nulle, ce qui conclut la preuve.

Le résultat de cette section peut donc être résumé comme suit: la disparition des GBs du spectre nécessite l'absence d'anomalies pour les symétries à basse énergie de la techni-théorie  $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R \times \text{U}(1)_{B-L}$ . La constante  $k_{\text{TT}}$  doit donc être égale à zéro (6.108). Cependant, ceci n'implique pas l'absence d'un terme de Wess-Zumino, puisque la techni-théorie peut produire des fermions composites légers. Un tel terme doit donc être inclus dans le lagrangien effectif pour satisfaire la condition de raccordement des anomalies. La construction implique en réalité une généralisation de celle de Wess-Zumino, généralisation possible quelle que soient les valeurs de  $\delta_L, \delta_R$  et  $B-L$ , signifiant qu'il n'y a pas de restrictions dues à la condition de raccordement des anomalies sur ces couplages. En particulier, la trace de  $B-L$  sur les fermions composites ne sera pas nécessairement nulle, ce qui constitue une différence avec le cas des fermions élémentaires, comme nous le verrons à la section 6.3.2. Notons cependant que dans le cas  $\delta_L \simeq \delta_R \simeq 0$ , la distinction expérimentale avec les fermions élémentaires est malaisée.

### 6.3.2 Fermions élémentaires dans la jauge unitaire

Nous nous intéressons à présent aux cas des fermions élémentaires. Pour ceux-ci, il n'y a pas de raccordement des anomalies à effectuer, puisque les champs fondamentaux correspondent directement aux degrés de liberté physiques à basse énergie, suite au couplage faible du secteur élémentaire. Nous nous concentrons donc sur l'étude des anomalies en tant qu'obstruction à l'élimination des GBs de l'action. Comme nous le verrons, le résultat est indépendant de la discussion précédente concernant les fermions composites: on trouve que la trace de  $B-L$  sur ces fermions élémentaires doit être nulle.

Le lagrangien pour les fermions élémentaires a été donné en (6.20). On définit tout d'abord l'opérateur de Dirac  $\mathcal{D}_e$

$$\mathcal{D}_e \chi = i \gamma^\mu D_\mu \chi, \quad (6.110)$$

de manière à ce que le lagrangien  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0 \zeta^0)$  pour les fermions élémentaires prenne la forme

$$i \bar{\chi} \gamma^\mu D_\mu \chi = \bar{\chi} \mathcal{D}_e \chi. \quad (6.111)$$

L'opérateur  $\mathcal{D}_e$  est invariant sous les symétries  $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$  de la techni-théorie, et nous n'avons donc besoin, pour en étudier les variations, de considérer uniquement les transformations du groupe  $\text{SU}(2)_{G_0} \times \text{SU}(2)_{G_1} \times \text{U}(1)_{B-L}$ , que nous paramétrons par la transformation  $\tau$

$$\tau = \left( G_0 = e^{i(\theta - \varphi)}, G_1 = e^{i(\theta + \varphi)}, \alpha^0 \right). \quad (6.112)$$

Sous une telle transformation, la variation du déterminant de  $\mathcal{D}_e$  est donnée, par l'expression

$$\begin{aligned} & -i D(\theta, \varphi, \alpha^0) \ln \text{Det } \mathcal{D}_e[g_0 G_{0\mu}, g_1 G_{1\mu}, B_\mu^0] \\ &= (B-L) \int dx \langle \varphi \Omega[g_0 G_{0\mu}, g_1 G_{1\mu}, B_\mu^0] \rangle. \end{aligned} \quad (6.113)$$



La fonctionnelle de Bardeen  $\Omega$  apparaissant ici est la même que dans (6.56), mais avec des arguments différents. Explicitement, on a

$$\Omega[g_0 G_{0\mu}, g_1 G_{1\mu}, B_\mu^0] = \frac{1}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\mu\nu}^0 (g_0 \partial_\rho G_{0\sigma} + g_1 \partial_\rho G_{1\sigma} - i g_0 g_1 [G_{0\rho}, G_{1\sigma}]) . \quad (6.114)$$

L'étape suivante dans cette discussion est de considérer l'effet des redéfinitions des champs utilisées pour définir la « jauge unitaire ». Nous avons déjà donné en (5.126-5.127), et nous les reproduisons ci-dessous (6.115-6.116), les redéfinitions des champs nécessaires pour les fermions élémentaires, afin d'éliminer les occurrences de la matrice  $\Sigma$  et définir des champs invariants sous  $SU(2)_R \times SU(2)_{G_1}$ . De nouveau, on remarque que ces redéfinitions sont formellement des transformations de jauge avec  $G_1 = \Sigma U$ . Ceci affecterait donc les champs  $G_{1\mu}$  et non pas les sources  $R_\mu$ , contrairement à la redéfinition utilisée en (6.95). Il pourrait donc sembler que ces deux redéfinitions des champs soient incompatibles. A nouveau, un examen détaillé prouve qu'il n'en est rien: la section 5.2.1 a montré que les deux connexions  $R_\mu$  et  $g_1 G_{1\mu}$  étaient en réalité identiques dans la jauge standard, ce qui est résumé à la section 6.1.2. Nous souhaitons cependant vérifier si l'on peut éliminer les GBs du lagrangien dans l'écriture générale, sans choix de jauge. La solution du problème réside dans l'observation suivante: les redéfinitions des champs utilisées dans les deux cas sont en réalité équivalentes indépendamment de la jauge, du fait de la contrainte (6.28) sur le spurion réel  $X$ .

La redéfinition appropriée afin d'absorber la matrice des GBs  $\Sigma$  est la suivante

$$\psi_L = {}^\lambda \chi_L = \Sigma U \chi_L , \quad (6.115)$$

$$\psi_R = {}^\lambda \chi_R = \chi_R , \quad (6.116)$$

où les nouvelles variables  $\psi$  sont invariantes sous les groupes  $SU(2)_R$  et  $SU(2)_{G_1}$ . En effet, on a

$$\psi_L \mapsto {}^t \psi_L = L e^{-i \frac{B-L}{2} \alpha^0} \psi_L , \quad (6.117)$$

$$\psi_R \mapsto {}^t \psi_R = G_0 e^{-i \frac{B-L}{2} \alpha^0} \psi_R . \quad (6.118)$$

La redéfinition (6.115) est formellement une transformation de jauge  $SU(2)_{G_0} \times SU(2)_{G_1} \times U(1)_{B-L}$  donnée en fonction des GBs et des champs spurioniques par

$$\lambda = (G_0 = \mathbb{1}, G_1 = \Sigma U, \alpha^0 = 0) . \quad (6.119)$$

Ceci est un cas particulier d'une transformation  $\tau$  (6.112), et implique la réécriture correspondante pour les champs de jauge

$$g_1 \mathcal{W}_\mu \equiv g_1 {}^\lambda G_{1\mu} - L_\mu , \quad (6.120)$$

qui définit les champs  $\mathcal{W}_\mu^a$  en fonction des champs  $G_{1\mu}^a$ . Plus explicitement, on aura en effet

$$\begin{aligned} g_1 \mathcal{W}_\mu &= i \Sigma U D_\mu (U^\dagger \Sigma^\dagger) \\ &= i \Sigma U \partial_\mu (U^\dagger \Sigma^\dagger) + g_1 \Sigma U G_{1\mu} U^\dagger \Sigma^\dagger - L_\mu , \end{aligned} \quad (6.121)$$

plutôt que la définition utilisée précédemment en (6.95). On montre à présent que ces deux redéfinitions sont en fait strictement équivalentes. On utilise la décomposition (5.54) de  $X$ , dans laquelle l'invariant  $\xi$  est une constante du fait de la contrainte (6.28), mais où la matrice  $U \in SU(2)$  dépend de  $x$  et se transforme selon

$$U \mapsto R U G_1^\dagger . \quad (6.122)$$

Le point important est que la contrainte (6.28) sur le spurion  $X$  implique

$$D_\mu U = 0 . \quad (6.123)$$

Injectant ceci dans (6.121), on obtient

$$\mathcal{W}_\mu = W_\mu . \quad (6.124)$$

Ainsi, bien que l'égalité entre connexions ne soit valable uniquement dans la jauge standard, les deux redéfinitions sont identiques en toute généralité.

La suite de la procédure est analogue à celle de la section 6.3.1: on étudie les conséquences de cette redéfinition au niveau des champs bosoniques, c'est-à-dire après intégration des fermions composites selon <sup>9</sup>

$$\int d[\chi] e^{i \int dx \bar{\chi} \mathcal{D}_e [g_0 G_{0\mu}, g_1 G_{1\mu}, B_\mu^0] \chi} = e^{\ln \text{Det } \mathcal{D}_e [g_0 G_{0\mu}, g_1 G_{1\mu}, B_\mu^0]} . \quad (6.125)$$

Pour ce qui est des configurations dans lesquelles les champs de GB  $\pi^a$  sont infinitésimaux, et où la matrice  $U$  est proche de l'unité avec  $\kappa = \kappa^a \tau^a$  dans

$$U = e^{-i \frac{\kappa}{f}} . \quad (6.126)$$

du même ordre que  $\pi$ , on aura, appliquant la version infinitésimale de (6.119)

$$\begin{aligned} & -i D \left( \theta = -\frac{\pi + \kappa}{2f}, \varphi = -\frac{\pi + \kappa}{2f}, \alpha^0 = 0 \right) \ln \text{Det } \mathcal{D}_e [g_0 G_{0\mu}, g_1 G_{1\mu}, B_\mu^0] \\ &= -\frac{B-L}{2f} \int dx \langle (\pi + \kappa) \Omega [g_0 G_{0\mu}, g_1 W_\mu + L_\mu, B_\mu^0] \rangle \\ &+ \mathcal{O}(\pi^2, \pi\kappa, \kappa^2) . \end{aligned} \quad (6.127)$$

Ainsi, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} \ln \text{Det } \mathcal{D}_e [g_0 G_{0\mu}, g_1 G_{1\mu}, B_\mu^0] &= \ln \text{Det } \mathcal{D}_e [g_0 G_{0\mu}, g_1 W_\mu + L_\mu, B_\mu^0] \\ &- i \frac{B-L}{2f} \int dx \langle (\pi + \kappa) \Omega [g_0 G_{0\mu}, g_1 W_\mu + L_\mu, B_\mu^0] \rangle \\ &+ \mathcal{O}(\pi^2, \pi\kappa, \kappa^2) . \end{aligned} \quad (6.128)$$

Ceci montre que les redéfinitions des champs génèrent des termes impliquant les GBs: il est donc impossible d'éliminer les GBs de l'action, excepté si la trace de  $B-L$  sur les fermions élémentaires s'annule. Pour obtenir ce résultat, on utilise le fait qu'il ne peut y avoir de compensation entre le terme impliquant les GBs généré par la réécriture du déterminant des fermions élémentaires (6.127) et celui généré par celle du déterminant des fermions composite (6.105). En effet, les fonctionnelles impliquent des champs différents. La variation du déterminant des fermions élémentaires doit donc s'annuler séparément, ce qui signifie

$$\sum_{\text{fermions élémentaires}} (B-L) = 0 . \quad (6.129)$$

On peut vérifier que les redéfinitions des champs éliminent bien les GBs, y compris dans le cas fini. Notons que la logique qui nous a menés à demander cette annulation des anomalies pour les fermions élémentaires est différente de celle utilisée dans le cas des théories renormalisables [GJ72, KAP72, GG72, BIM72].

Finalement, nous transcrivons au niveau du lagrangien fermioniques les réécritures impliquées par les redéfinitions effectuées ci-dessus. Puisque le lagrangien pour les fermions élémentaires (6.20), ainsi que la mesure d'intégration sur ces fermions (suite à (6.129)) sont invariants sous la transformation  $\lambda$ , on a

$$\int d[\chi] e^{i \mathcal{L}_{\text{élé.}} [\chi, \Sigma, g_0 G_{0\mu}, g_1 G_{1\mu}, B_\mu^0]} = \int d[\psi] e^{i \mathcal{L}_{\text{élé.}} [\psi, \mathbb{1}, g_0 G_{0\mu}, g_1 W_\mu + L_\mu, B_\mu^0]} . \quad (6.130)$$

La conclusion est donc que le lagrangien dans la « jauge unitaire » est obtenu directement *via* le remplacement

$$\{\chi, \Sigma, G_{1\mu}, B_\mu^0\} \longrightarrow \left\{ \psi, \mathbb{1}, W_\mu + \frac{1}{g_1} L_\mu, B_\mu^0 \right\} . \quad (6.131)$$

<sup>9</sup>. Les termes de masses n'interviennent pas dans la variation anormale, et sont donc omis dans cette discussion. Rappelons en revanche que ce sont précisément les termes de Yukawa qui contiennent la matrice  $\Sigma$  que nous cherchons à éliminer, et qui ont permis de déterminer les redéfinitions appropriées (6.115-6.116) (voir (5.126-5.127)).

## 6.4 Triangles dans la jauge unitaire

Nous introduisons à présent les redéfinitions des champs fermioniques composites pour atteindre cette même « jauge unitaire ». La section 6.3.1 ne traitait que des redéfinitions dans le secteur bosonique, après intégration du déterminant fermionique. Les redéfinitions à appliquer sont déterminées de manière à obtenir des champs invariants sous  $SU(2)_R$ . A cette fin, nous utilisons la transformation  $\omega$  donnée en (6.101), et définissons

$$\psi_L^\bullet = {}^\omega \chi_L^\bullet = \Sigma \chi_L^\bullet, \quad (6.132)$$

$$\psi_R^\bullet = {}^\omega \chi_R^\bullet = \chi_R^\bullet. \quad (6.133)$$

Ceci donne effectivement des champs ayant les propriétés de transformation désirées

$$\psi_L^\bullet \mapsto {}^t \psi_L^\bullet = L e^{-i \frac{B-L}{2} \alpha^0} \psi_L^\bullet, \quad (6.134)$$

$$\psi_R^\bullet \mapsto {}^t \psi_R^\bullet = L e^{-i \frac{B-L}{2} \alpha^0} \psi_R^\bullet. \quad (6.135)$$

Nous savons que dans ce cas, le déterminant de l'opérateur de Dirac est modifié sous la transformation chirale  $\omega$ . Cependant, l'absence d'anomalies ( $k_{\text{TT}} = 0$ ) pour l'ensemble de la techni-théorie signifie que cette variation est compensée par le terme de Wess-Zumino. Nous pouvons donc développer l'équation (6.109) sous la forme

$$\begin{aligned} e^{i\Gamma[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]} &= e^{iS_{\text{inv}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] + i\hat{S}_{\text{WZ}}[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]} \int d[\chi^\bullet] e^{i\int dx \bar{\chi}^\bullet \mathcal{D}_\bullet[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] \chi^\bullet} \\ &= e^{iS_{\text{SB}}[\mathbb{1}, L_\mu, g_1 W_\mu + L_\mu, B_\mu^0]} \int d[\psi^\bullet] e^{i\int dx \bar{\psi}^\bullet \mathcal{D}_\bullet[\mathbb{1}, L_\mu, g_1 W_\mu + L_\mu, B_\mu^0] \psi^\bullet}, \end{aligned} \quad (6.136)$$

où nous avons utilisé la condition limite (6.87) pour  $\hat{S}_{\text{WZ}}$  ainsi que la définition

$$\mathcal{D}_\bullet[\Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0] = \hat{\mathcal{D}}_\bullet[\hat{L}_\mu, \hat{R}_\mu, B_\mu^0]. \quad (6.137)$$

Le résultat des redéfinitions des champs au niveau du lagrangien se réduit à effectuer le remplacement suivant

$$\{\chi^\bullet, \Sigma, L_\mu, R_\mu, B_\mu^0\} \mapsto \{\psi^\bullet, \mathbb{1}, L_\mu, g_1 W_\mu + L_\mu, B_\mu^0\}, \quad (6.138)$$

ce qui donne directement le lagrangien en jauge unitaire.

Dans le cadre des théories effectives, il est tout-à-fait naturel d'utiliser la jauge unitaire, afin de travailler exclusivement avec des champs physiques. Ici, l'avantage supplémentaire est que le terme de type Wess-Zumino est nul dans cette jauge. Nous choisissons donc d'utiliser cette jauge pour la discussion suivante concernant les diagrammes triangulaires. On considère le résultat de (6.136), qui implique

$$e^{i\Gamma[L_\mu, R_\mu, B_\mu^0]} = \int d[\psi^\bullet] e^{i\int dx \mathcal{L}_{\text{SB}}[\mathbb{1}, L_\mu, g_1 W_\mu + L_\mu, B_\mu^0] + \bar{\psi}^\bullet \mathcal{D}_\bullet[\mathbb{1}, L_\mu, g_1 W_\mu + L_\mu, B_\mu^0] \psi^\bullet}, \quad (6.139)$$

où l'intégrale sur les champs  $\Sigma$  a déjà été effectuée, donnant un facteur constant, puisque l'action en fonction des variables dans la jauge unitaire n'en dépend plus explicitement.

Nous déterminons à présent les contributions anomaes des fermions composites aux fonctions à trois points des techni-courants<sup>10</sup>. On utilise tout d'abord les expressions des techni-courants en termes des variables de basse énergie, obtenues en considérant les dérivées par rapport aux sources  $L_\mu$ <sup>11</sup> du lagrangien  $\mathcal{L}_{\text{tot}}$ . invariant sous  $S_{\text{naturel}}$  (6.23). On écrit ensuite le résultat dans la jauge standard, afin de rendre le contenu dynamique explicite. Lorsque l'on utilise les redéfinitions des champs pour obtenir l'expression dans la jauge unitaire, on trouve

$$J_L^{3\nu} = -\frac{M_W^2}{c g_1} Z^\nu + \delta_L \bar{\psi}_L^\bullet \gamma^\nu \frac{\tau^3}{2} \psi_L^\bullet + (1 - \delta_R) \bar{\psi}_R^\bullet \gamma^\nu \frac{\tau^3}{2} \psi_R^\bullet, \quad (6.140)$$

$$J_L^{\pm\nu} = -\frac{M_W^2}{g_1} W^{\nu\pm} + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_L \bar{\psi}_L^\bullet \gamma^\nu \tau^\pm \psi_L^\bullet + \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \delta_R) \bar{\psi}_R^\bullet \gamma^\nu \tau^\pm \psi_R^\bullet. \quad (6.141)$$

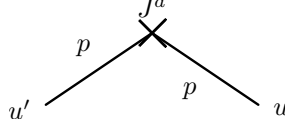
10. Les fermions élémentaires ne contribuent pas à ces fonctions, puisqu'ils ne couplent pas aux techni-courants.

11. Nous ne discutons pas les courants  $J_R^\mu$ , car leur étude réintroduirait les GBs dans l'action: bien que ces courants soient parfaitement bien définis au niveau de la techni-théorie, leur utilisation est malaisée lorsque les champs de jauge interviennent.

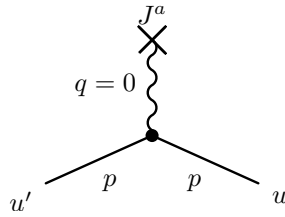
Suivant [CG82], on peut exprimer l'élément de matrice de ces courants entre deux états asymptotiques de fermions composites (dans la limite de masse nulle) décrits par des spineurs  $u'$  et  $u$  portant une impulsion identique  $p$  et vérifiant l'équation de Dirac sans masse

$$\langle u', A, p | J^{a\mu}(0) | u, B, p \rangle = \bar{u}' \gamma^\mu (\mathcal{V}_{AB}^a - \gamma_5 \mathcal{A}_{AB}^a) u, \quad (6.142)$$

où  $\mathcal{V}^a$  et  $\mathcal{A}^a$  sont des matrices  $2 \times 2$  dont les indices  $A, B$  distinguent entre la composante supérieure et inférieure du doublet. L'expression de ces matrices est obtenue en tenant compte de deux contributions. L'une provient de la contraction des deux derniers termes dans (6.140-6.141) avec les pattes externes, correspondant au diagramme de la figure 6.5. L'autre contribution implique un propagateur d'un champ vectoriel, comme représenté à la figure 6.6.



**Figure 6.5.** Contribution directe à l'élément de matrice.



**Figure 6.6.** Contribution indirecte à l'élément de matrice, impliquant l'émission d'un boson vecteur.

Dans cette seconde contribution, le terme longitudinal dans la polarisation du vecteur ne contribue pas, suite à l'utilisation de l'équation de Dirac sans masse. D'autre part, la contribution est locale, l'impulsion portée par le boson vecteur étant nulle. L'évaluation de ce dernier diagramme nécessite de connaître l'expression du couplage entre bosons vecteurs et fermions composites. Ceci est obtenu en écrivant explicitement le lagrangien (6.8) dans la jauge standard, utilisant les variables dans la jauge unitaire

$$\begin{aligned} \bar{\chi}^\bullet \hat{\mathcal{D}}_\bullet \chi^\bullet &= i \bar{\psi}^\bullet \gamma^\mu \partial_\mu \psi^\bullet + e \bar{\psi}^\bullet \gamma^\mu Q \psi^\bullet A_\mu - \frac{e s}{c} \bar{\psi}^\bullet \gamma^\mu Q \psi^\bullet Z_\mu \\ &+ \frac{e}{c s} (1 - \delta_L) \bar{\psi}_L^\bullet \gamma^\mu \frac{\tau^3}{2} \psi_L^\bullet Z_\mu + \frac{e}{\sqrt{2} s} (1 - \delta_L) \bar{\psi}_L^\bullet \gamma^\mu \tau^\pm \psi_L^\bullet W_\mu^\pm \\ &+ \frac{e}{c s} \delta_R \bar{\psi}_R^\bullet \gamma^\mu \frac{\tau^3}{2} \psi_R^\bullet Z_\mu + \frac{e}{\sqrt{2} s} \delta_R \bar{\psi}_R^\bullet \gamma^\mu \tau^\pm \psi_R^\bullet W_\mu^\pm. \end{aligned} \quad (6.143)$$

Posant  $\delta_L = \delta_R = 0$  dans cette équation, on peut vérifier que les couplages des fermions composites à l'ordre  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0 \zeta^0)$  se réduisent à ceux des fermions élémentaires (5.129). Comme déjà mentionné auparavant, on vérifie également que les constantes  $\delta_L, \delta_R$  permettent des couplages non-standard de ces fermions composites aux bosons vecteurs massifs, ainsi que des couplages des fermions composites droits aux bosons  $W^\pm$ . Grâce à ce travail préliminaire, on trouve que les éléments de matrice (6.142) ont une structure vectorielle, soit

$$\mathcal{A}^a = 0, \quad (6.144)$$

et n'impliquent pas les couplages  $\delta_L, \delta_R$ . Tous calculs faits, on obtient effectivement

$$\mathcal{V}^3 = \frac{1}{1 + \gamma^2} \left( \frac{\tau^3}{2} - \gamma^2 \frac{B - L}{2} \right), \quad (6.145)$$

$$\mathcal{V}^\pm = \frac{\tau^\mp}{\sqrt{2}}. \quad (6.146)$$

Ainsi, les diagrammes triangulaires de fermions composites ne génèrent pas de contributions anoma-  
males aux fonctions à trois points des techni-courants ou du courant électromagnétique, qui est  
également vectoriel. Rappelons qu'il n'y a pas d'autres contributions anomaes possibles à ces  
fonctions de Green dans la jauge unitaire, puisque le terme de Wess-Zumino  $\hat{S}_{\text{WZ}}[1, g_1 W_\mu + L_\mu, R_\mu,$   
 $B_\mu^0]$  apparaissant dans le membre de droite de l'équation (6.136) s'annule suite à la condition limite  
(6.87). Notons que ce résultat concorde avec celui de la section 6.3.1, qui était que les fonctions  
de Green des techni-courants devaient être exemptes d'anomalies.

Nous examinons à présent les contributions anomaes des diagrammes triangulaires des fermions  
composites aux fonctions à trois points des bosons vecteurs. Les contributions des fermions élé-  
mentaires sont ici encore nulles, suite à la condition (6.129). On exprime les couplages des fermions  
composites aux bosons vecteurs dans la jauge unitaire extraits de (6.139) en termes des bilinéaires  
suivants

$$j_\mu^0 = \frac{1}{2} \bar{\psi}^\bullet \gamma_\mu \psi^\bullet, \quad (6.147)$$

$$j_\mu^a = \bar{\psi}^\bullet \gamma_\mu \frac{\tau^a}{2} \psi^\bullet, \quad (6.148)$$

$$j_\mu^{5,a} = \bar{\psi}^\bullet \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi^\bullet. \quad (6.149)$$

On peut donner l'expression de la contribution des diagrammes triangulaires à la fonction à trois  
points des bosons vecteurs en termes d'une seule fonction  $T_{\mu\nu\rho}$  qui contient toute l'information  
concernant les graphes triangulaires (voir [CG82])

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3) T_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3) \\ &= - \int dx dy dz e^{-i(k_1 \cdot x + k_2 \cdot y + k_3 \cdot z)} \left\langle 0 \left| T j_\mu^0(x) j_\nu^3(y) j_\rho^{5,3}(z) \right| 0 \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.150)$$

Définissant

$$e^{iW[W_\mu^\pm, Z_\mu, A_\mu]} = \int d[\psi^\bullet] e^{i \int dx \mathcal{L}[\psi^\bullet, W_\mu^\pm, Z_\mu, A_\mu]}, \quad (6.151)$$

on obtient les termes trlinéaires suivants, dans l'espace des impulsions

$$\begin{aligned} W[W_\mu^\pm, Z_\mu, A_\mu] &= \int \frac{dk_2}{(2\pi)^4} \frac{dk_3}{(2\pi)^4} g_1^3 T_{\mu\nu\rho}(-k_2 - k_3, k_2, k_3) \\ &\times \{ D^{AWW} A^\mu(-k_2 - k_3) (W^{+\nu}(k_2) W^{-\rho}(k_3) + W^{-\nu}(k_2) W^{+\rho}(k_3)) \\ &+ D^{ZWW} Z^\mu(-k_2 - k_3) (W^{+\nu}(k_2) W^{-\rho}(k_3) + W^{-\nu}(k_2) W^{+\rho}(k_3)) \\ &+ D^{ZZZ} Z^\mu(-k_2 - k_3) Z^\nu(k_2) Z^\rho(k_3) \\ &+ D^{AZZ} A^\mu(-k_2 - k_3) Z^\nu(k_2) Z^\rho(k_3) \\ &+ D^{ZAZ} Z^\mu(-k_2 - k_3) A^\nu(k_2) Z^\rho(k_3) \\ &+ D^{AAZ} A^\mu(-k_2 - k_3) A^\nu(k_2) Z^\rho(k_3) \\ &+ \text{termes bilinéaires et puissances plus élevées} \}. \end{aligned} \quad (6.152)$$

Les constantes  $D$  dans l'équation (6.152) s'expriment à leur tour en termes des deux constantes  
suivantes

$$D^{AWW} = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \frac{B-L}{4} (\delta_R^2 - (1-\delta_L)^2), \quad (6.153)$$

$$D^{AAZ} = \frac{\gamma^2}{\sqrt{1+\gamma^2}} \frac{B-L}{2} (\delta_R + \delta_L - 1), \quad (6.154)$$

selon

$$D^{ZWW} = -\gamma D^{AWW}, \quad (6.155)$$

$$D^{ZAZ} = -\gamma D^{AAZ}, \quad (6.156)$$

$$D^{AZZ} = (1+\gamma^2) D^{AWW} - \gamma D^{AAZ}, \quad (6.157)$$

$$D^{ZZZ} = -\gamma ((1+\gamma^2) D^{AWW} - \gamma D^{AAZ}). \quad (6.158)$$

Nous trouvons en particulier que les boucles de fermions composites génèrent des contributions aux couplages des bosons vecteurs neutres. Les implications des paramètres  $\delta_L, \delta_R$  sur ces interactions pourront être étudiées suivant [Ren82, BBCD85, GLR00b, GLR00a]. Nous précisons ici uniquement que la contribution d'un doublet composite serait nulle si l'on avait

$$\delta_L + \delta_R = 1. \quad (6.159)$$

Ceci n'est pas en contradiction avec le fait que les fermions élémentaires aient  $\delta_L = \delta_R = 0$ . En effet, les contributions anomales des fermions élémentaires sont nulles pour une raison différente: du fait de la condition sur la trace de  $B - L$ .

Remarquons également que la renormalisabilité au sens de Weinberg n'est pas perdue: nous avons au contraire vu que les fonctions à trois points des techni-courants vérifient des identités de Ward non-anomales. Le principe de construction de la LEET était précisément l'invariance locale sous les transformations  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ , qui est donc exacte. D'autre part, le secteur élémentaire est également exempt d'anomalies, puisque l'on doit avoir une trace de  $B - L$  nulle sur les fermions élémentaires pour que les GBs disparaissent de l'action. A nouveau, cela signifie que la construction du lagrangien suit bien le principe d'invariance locale. Les seules anomalies sont les contributions du secteur composite aux fonctions de Green des champs vecteurs dynamiques, ce qui n'est possible que *via* le couplage introduit par les spurions, et visible après avoir effectué un choix de jauge. Il n'y a donc pas là de contradiction avec le principe d'invariance utilisé lors de la construction. Précisons que ces contributions peuvent être non-nulles alors que la techni-théorie est non-anomale, uniquement pour la raison suivante: les anomalies de la techni-théorie sont nulles lorsque l'on ajoute les contributions des GBs et des fermions composites. Dans la jauge unitaire cependant, il n'y a plus de GBs, et seuls les fermions composites peuvent donner des contributions anomales aux fonctions de Green.

## 6.5 Résumé

Afin de reproduire les identités de Ward non-anomales de la théorie fondamentale, le lagrangien effectif doit être invariant sous des transformations locales des sources. En revanche, le lagrangien effectif devra contenir des termes non-invariants pour reproduire les identités de Ward des symétries anomales. La variation de la fonctionnelle génératrice peut être extraite de la techni-théorie: c'est une variation de Bardeen, d'ordre  $\mathcal{O}(p^4 \epsilon^0 \zeta^0)$ .

La condition que la techni-théorie doit satisfaire afin que les trois GBs disparaissent du spectre suite au mécanisme de Higgs est la suivante: les symétries  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$  de la techni-théorie doivent être exemptes d'anomalies, soit  $k_{\text{TT}} = 0$ . Les théories telles que la QCD, ou plutôt dans le cas de l'EWSB qui nous intéresse ici, sa copie avec deux saveurs, directement transposée à une échelle d'énergie plus haute, ne satisfont pas à cette condition si les charges  $B - L$  des techniquarks sont non-nulles (elles sont nécessairement identiques pour les deux composants du doublet). Un tel modèle de technicouleur ne permet donc pas de décrire la brisure électrofaible. Les modèles de technicouleur sans anomalies posséderont en revanche un groupe de symétrie plus grand, qui devrait se refléter dans le spectre des résonances, invalidant *a priori* l'estimation du paramètre  $S$  à partir de la valeur de  $L_{10}$  obtenue en QCD. Précisons que le résultat  $k_{\text{TT}} = 0$  vaut indépendamment de la possible présence de fermions composites. En effet, le résultat du raccordement des anomalies permet de poser la question directement en termes de la techni-théorie.

Pour ce qui est du raccordement des anomalies lui-même, nous avons étendu la construction du lagrangien effectif de Wess-Zumino au cas où le secteur de basse énergie contient des fermions composites en plus des GBs. Ceci est toujours possible, quelles que soient les valeurs des couplages non-standards  $\delta_L, \delta_R$  des fermions composites, permis à l'ordre  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0 \zeta^0)$  par la réalisation non-linéaire de la symétrie, et quelles que soient les valeurs de leurs charges  $U(1)_{B-L}$ . La conclusion est donc qu'il n'y a pas de restriction sur ces couplages. La possibilité d'une quatrième génération (partielle) constituée de fermions composites est donc théoriquement ouverte.

Le formalisme des spurions permet précisément de distinguer entre fermions composites et élémentaires: puisque les deux secteurs sont couplés *via* les spurions, le mélange entre les deux types de fermions apparaît uniquement aux ordres supérieurs en puissance des spurions. Qualitativement, les propriétés spécifiques d'éventuels fermions composites seraient: i) les couplages non-standards  $\delta_L, \delta_R$  décrivant la violation de l'universalité des couplages des fermions gauches aux bosons vecteurs massifs, ainsi que des couplages des fermions composites droits aux  $W^\pm$ , ii) une masse commune du doublet relativement grande, et une différence de masse relativement faible entre les deux composantes du doublet, iii) pas de restriction sur la valeur de  $B - L$ , c'est-à-dire la possibilité d'avoir une quatrième génération incomplète. Ces propriétés excluent en pratique l'interprétation des fermions déjà connus en tant que composites. Nous avons également présenté une manifestation indirecte des fermions composites dans les vertex à trois bosons vecteurs induits par les graphes triangulaires.

Les fermions élémentaires, quant à eux, n'ont pas de couplages non-standard du type  $\delta_L, \delta_R$  à l'ordre dominant du développement. Ils ne participent pas au raccordement des anomalies, étant extérieurs au secteur composite. Nous trouvons néanmoins la condition usuelle que la trace de  $B - L$  sur ces fermions doit être nulle. Dans le LEET, ceci provient de l'hypothèse que les GBs disparaissent du spectre, à la différence des théories renormalisables où l'on cherche à préserver la renormalisabilité. La théorie effective peut alors être traitée de manière cohérente dans la jauge unitaire.

# Conclusion

Le Modèle Standard décrit avec succès les expériences effectuées auprès des accélérateurs actuels. Sa construction obéit au principe de renormalisabilité: le mécanisme de Higgs élémentaire, utilisant un doublet complexe de champs scalaires, permet de donner des masses aux champs de jauge ainsi qu'aux fermions chiraux. Cette description laisse suffisamment de liberté pour décrire les masses des fermions et leurs mélanges. Les opérateurs effectifs générés par la nouvelle physique au-delà du SM doivent être pris en compte si l'on considère le SM comme une théorie effective. Ils sont supprimés par une échelle de masse, et sont donc *irrelevant*s à basse énergie.

Parmi les premiers opérateurs *irrelevant*s (de dimension cinq ou six), il en existe une classe qui implique le doublet de Higgs élémentaire. Ils introduiront des déviations par rapport aux prédictions du SM seul: paramètre  $S$ , paramètre  $T$ , corrections à l'universalité des couplages des fermions gauches aux bosons vecteurs, introduction de couplages des fermions droits aux  $W^\pm$  et finalement violation du nombre leptonique. Le triomphe du SM réside dans le fait que de telles déviations n'ont pas été détectées jusqu'à présent. Puisque le champ de Higgs a une dimension physique, on comprend que la suppression de ces opérateurs par une échelle peut être altérée si le mécanisme de brisure de la symétrie de jauge électrofaible est modifié. Le danger est bien réel dans le cas où le mécanisme de Higgs a lieu sans laisser de particule scalaire légère dans le spectre: ces « opérateurs indésirables » apparaîtront alors dès l'ordre dominant dans le développement approprié.

Dans ce dernier cas, au lieu d'introduire les quatre champs réels dans un doublet de Higgs élémentaire, le mécanisme de Higgs fonctionne uniquement avec trois modes de Goldstone générés par la dynamique d'une théorie en interactions fortes. La propriété de renormalisabilité est alors perdue, et on utilise donc dès le début le langage des théories effectives à basse énergie: la théorie effective est en effet non-découplante.

Le cadre de la LEET non-découplante permet d'aborder une telle formulation sans avoir recours à un modèle spécifique. Pour définir la LEET correspondant aux modèles de brisure électrofaible sans particule de Higgs physique, on doit préciser le spectre à basse énergie de la théorie, ainsi que les symétries, qui jouent un rôle crucial dans la construction. Nous nous intéressons au cas du spectre minimal à basse énergie, pour lequel les seules particules légères (masses inférieures au TeV) sont le photon, les bosons vecteurs  $W^\pm$  et  $Z^0$ , les trois générations de leptons connues, ainsi que trois générations de quarks interagissant également avec les gluons de la QCD (on sait par ailleurs que la QCD présente la propriété de confinement: ceci n'est cependant pas l'objet de notre discussion). En réalité, notre description introduira de trois neutrinos droits quasi-stériles légers, qui découplent en première approximation.

Les principes de formulation, construction et renormalisation d'une telle théorie effective ont été établis dans le cadre de l'étude des conséquences à basse énergie de la QCD. Dans ce cas, les degrés de liberté utilisés dans la construction du lagrangien effectif ( $\chi$ PT) sont les GBs correspondant à la brisure spontanée de la symétrie chirale. On développe alors le lagrangien effectif en puissances des impulsions et de constantes « naturellement petites »: les constantes telles que la symétrie est accrue lorsqu'elles sont posées égales à zéro. En réalité, on utilise des spurions (champs ne se propageant pas) pour formellement rendre le lagrangien invariant sous cette symétrie accrue. Le régime dans lequel un développement est possible est le suivant: basse énergie, paramètres de brisure explicite petits et couplage aux champs de jauge externes faible. Si ceci correspond à la situation physique, la LEET fournira un outil utile. Plus précisément, la formule de comptage de Weinberg montre que le développement chirale correspond à un développement en boucles: l'obtention de résultats à un niveau de précision donné requiert l'évaluation d'un nombre fini de diagrammes. Afin d'obtenir la même formule dans le cadre présent, les constantes de couplage de



jauge doivent être comptées comme paramètres de développement au même titre que les impulsions, soit  $g = \mathcal{O}(p^1)$ . Il en est de même pour les bilinéaires de fermions, qui sont également comptabilisés comme  $\mathcal{O}(p^1)$ . Le lagrangien effectif contient tous les termes permis par la symétrie, ordonnés selon les puissances de ces paramètres de développement.

Comme application directe des règles de construction énoncées ci-dessus, on peut considérer une théorie de Yang-Mills massive à l'ordre d'une boucle. Les trois GBs de la brisure  $SU(2)_L \times SU(2)_R \longrightarrow SU(2)_{L+R}$  sont alors couplés à une théorie de Yang-Mills dont le groupe de transformation est simplement identifié à  $SU(2)_R$ . On peut vérifier, par un calcul utilisant les méthodes du noyau de la chaleur, que toutes les divergences à une boucle de la fonctionnelle génératrice sont absorbées dans les LECs du lagrangien à l'ordre sous-dominant.

L'utilisation des mêmes méthodes dans le cadre du secteur électrofaible nécessite de coupler les trois GBs de la brisure  $SU(2)_L \times SU(2)_R \longrightarrow SU(2)_{L+R}$  à une théorie de Yang-Mills  $SU(2) \times U(1)$  ainsi qu'à des fermions chiraux correspondant aux leptons et aux quarks. La symétrie  $SU(2)_L$  sera à l'origine de la symétrie custodiale. Le groupe de jauge  $U(1)$  doit être identifié avec le sous-groupe abélien de  $SU(2)_L$  ainsi qu'avec les transformations appropriées des fermions. On rencontre alors des difficultés sur deux plans. D'une part, les opérateurs indésirables mentionnés ci-dessus apparaissent à l'ordre dominant  $\mathcal{O}(p^2)$  dans le développement à basse énergie. D'autre part, la formule de comptage de Weinberg n'est pas reproduite, les termes de masses des fermions pouvant apparaître à l'ordre  $\mathcal{O}(p^1)$ . D'un point de vue théorique, le comptage de puissances pour les termes brisant explicitement la symétrie custodiale n'est pas donné de manière univoque par les règles de construction.

La présence des termes indésirables dès l'ordre dominant  $\mathcal{O}(p^2)$  constitue un grave danger pour les LEET sensée décrire la brisure électrofaible sans particule de Higgs physique. La solution que nous proposons pour résoudre ces difficultés est la suivante. On demande l'invariance du lagrangien effectif sous le groupe  $S_{\text{naturel}} = SU(2)_{G_0} \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_{G_1} \times U(1)_{B-L}$  correspondant à la situation où le secteur composite (GBs) n'interagit pas avec le secteur élémentaires (champs de Yang-Mills faiblement couplés et champs fermioniques correspondant aux quarks et leptons). Le lagrangien effectif est développé en puissances de champs spurioniques, qui introduisent les interactions entre les deux secteurs. La sélection du groupe  $SU(2)_w \times U(1)_Y$  est due aux contraintes de constance covariante imposées sur les spurions: ceci définit l'alignement du vide.

On constate que les termes indésirables rencontrés dans la formulation originale basée sur la symétrie  $SU(2) \times U(1)$  nécessitent des insertions de spurions pour être rendus invariants sous  $S_{\text{naturel}}$ . Ils sont donc relégués à des ordres supérieurs dans le développement. De plus, à l'ordre où les masses des fermions élémentaires apparaissent dans le formalisme utilisant les spurions, la matrice de masse des quarks possède autant de paramètres que dans le SM, donnant ainsi une matrice CKM avec trois angles et une phase, comme dans le SM. La formule de comptage de Weinberg est à nouveau obtenue moyennant un lien entre le comptage de puissance en  $\epsilon$  pour les spurions  $X$  et  $\tilde{Y}$ , et celui des impulsions, selon  $\epsilon = \mathcal{O}(p^{1/2})$ . Par ailleurs, le spurion  $\phi$  qui est responsable de l'alignement des transformations  $U(1)_{B-L}$  avec celles générées par la troisième composante de l'isospin droit, permet de construire des opérateurs donnant des masses de Majorana naturellement petites pour les neutrinos actifs. On peut également imposer une symétrie discrète pour interdire les termes de masses de Dirac pour les neutrinos. Les neutrinos droits sont alors quasi-stériles (interactions avec les champs vecteurs supprimés par un facteur  $\epsilon^2$  par rapport aux autres fermions) et légers par rapport à l'échelle  $\Lambda \sim 3$  TeV. Il sont de plus stables.

A ce stade, nous avons donc montré que la LEET de l'EWSB sans particule de Higgs physique survivre au danger phénoménologique des termes indésirables. Les termes qui étaient *irrelevant*s à basse énergie dans le cas du mécanisme de Higgs élémentaire sont à nouveaux supprimés : ils sont relégués aux ordres supérieurs du développement spurionique. On a donc résolu les difficultés qui se posaient au niveau des arbres, et étaient souvent traitées au cas par cas dans la littérature, sans relier la suppression des divers opérateurs à une propriété de symétrie. Le cadre présenté

permet un traitement systématique de ces interactions dans un développement. Le fait que le même formalisme de spurion réponde à des questions différentes ne doit cependant pas faire oublier que les mécanismes dynamiques décrits par ces différents spurions peuvent être très différents. Cela est partiellement reflété dans le comptage de puissances pour le spurion  $\phi$ , qui est distinct de celui des spurions  $X$  et  $\tilde{Y}$ . Ceci nous rappelle que, bien que l'utilisation des spurions corresponde à une certaine façon de coupler les deux secteurs, nous n'en connaissons que la formulation à basse énergie: au niveau de la LEET, les spurions ne font que décrire ce couplage d'une façon cohérente, sans expliquer le mécanisme sous-jacent. Notons de plus que la construction utilisant les spurions repose fortement sur la structure particulière du groupe  $SU(2)$ . L'application à d'autres groupes ne serait pas immédiate.

L'étape suivante après le travail de formulation de la LEET décrit ci-dessus serait la comparaison détaillée avec les tests de précision. Une telle étude nécessiterait d'évaluer les expressions à une boucle des observables. Ces expressions dépendent des constantes de basse énergie apparaissant dans le lagrangien. Le but est de fixer ces LECs à partir de certaines expériences et de prédire ensuite les résultats d'autres mesures impliquant les mêmes constantes. En particulier, mentionnons que le traitement complet à une boucle d'un processus tel que la diffusion  $W^+ W^-$  reste à faire. Une analogie avec le traitement dispersif à deux boucles de la diffusion  $\pi\pi$  en  $\chi PT$  [KMSF95] est d'ailleurs possible: la LEET étant un moyen de construire des approximations successives de la matrice  $S$  approchant la condition d'unitarité, on s'attend à des effets visibles à des énergies inférieures au TeV, pour lesquelles la LEET pourrait encore être utilisable.

Nous avons également discuté la question des anomalies au niveau de la LEET, nous affranchissant du cadre des théories renormalisables. Les anomalies sont en effet généralement considérées sous l'angle de la renormalisabilité, qui en requiert l'absence. Dans le cadre des LEETs, un tel critère fait défaut. En revanche, nous demandons que le mécanisme de Higgs ait bien lieu, c'est-à-dire que les GBs disparaissent du spectre. L'étude fait appel à la condition de raccordement des anomalies (*anomaly-matching*) entre la description à basse énergie du secteur composite, et le modèle sous-jacent (la « techni-théorie »). On montre qu'il est toujours possible de construire une généralisation du lagrangien de Wess-Zumino réalisant cette condition de raccordement des anomalies, même lorsque les degrés de liberté légers incluent des fermions composites. La condition de raccordement n'entraîne donc pas de restrictions sur les couplages des fermions composites.

On peut vérifier que les redéfinitions des champs vectoriels ne permettent plus d'éliminer les GBs de l'action, excepté dans le cas où le secteur composite est exempt d'anomalies. La condition de raccordement des anomalies permet alors de déduire l'absence d'anomalies pour les identités de Ward des courants de Noether de la techni-théorie. Notons que le résultat précédent n'entraîne pas forcément l'absence de contributions anormales aux fonctions à trois points des boson vecteurs: ceci se comprend dans la jauge unitaire où les GBs sont absents, mais où les éventuels fermions composites peuvent contribuer par des diagrammes triangulaires. Leur contribution anormale à ces fonctions à trois points n'est pas compensée par celles des GBs, alors qu'elle doit être compensée lorsque l'on considère les fonctions de Green des courants de la techni-théorie, d'après la condition de raccordement des anomalies.

Etudiant les redéfinitions des champs en présence de fermions élémentaires, on obtient la contrainte habituelle que la trace de  $B - L$  sur ces derniers doit être nulle, mais pour la raison suivante: si tel n'est pas le cas, les GBs ne peuvent pas être éliminés de l'action. Ceci complète notre discussion de la formulation de la LEET pour l'EWSB sans Higgs.

Nous avons donc trouvé des conditions que la LEET doit respecter pour être viable et ne pas être en conflit direct avec les expériences. Ces conditions se traduisent en termes d'une symétrie « naturelle » et de l'introduction des interactions *via* les spurions. Nous ne savons pas formuler les restrictions correspondantes sur l'ensemble des modèles possibles, ni même s'il existe des théories qui vérifieraient ces conditions. La formulation explicite d'un tel modèle serait donc une avancée appréciable puisqu'elle fournirait une preuve d'existence. Il serait particulièrement intéressant d'avoir une idée du spectre des premières résonances: c'est précisément ce spectre qui est mis en cause dans l'exclusion de la technicouleur *via* le paramètre  $S$ . Dans le cas d'un modèle non-anomal, et donc avec un contenu en champs différent de la QCD, ce spectre sera *a priori* différent.

En conclusion, ce travail tend à montrer que les scénarios de brisure électrofaible sans particule de Higgs physique ne sont pas exclus en toute généralité, puisque l'on peut résoudre les difficultés qualitatives dans l'approche générale des LEETs. Cependant, ceci ne donne pas d'indications sur le degré de confiance que l'on peut avoir qu'un tel scénario soit effectivement réalisé dans la nature. Ceci est d'autant plus vrai que l'ensemble des modèles satisfaisants (qui seront décrits par la LEET que nous avons considérée) peut être vide. En dernier ressort, la question est donc d'ordre expérimental: la découverte de la particule de Higgs viendrait confirmer le mécanisme élémentaire. La recherche des partenaires supersymétriques serait alors le pas suivant.

Le problème de la saveur et de la hiérarchie entre générations n'a pas été considéré dans ce manuscrit. Ces questions sont également liées à la suppression des opérateurs à quatre fermions par une échelle de masse: cette suppression n'est pas remise en cause dans le cas de la LEET. De plus, on peut voir que l'implémentation d'une symétrie horizontale, comme fait dans la littérature concernant le SM, peut être transposée à la LEET. Une telle symétrie s'intégrerait naturellement dans le formalisme des spurions.

Finalement, nous revenons sur le sujet des *mooses* et des WSRs, que nous avons abordé comme première application du formalisme des spurions. Nous avons vu dans ce cas que les modèles *moose*, ou plutôt la LEET obtenue par l'introduction *via* les spurions du couplage entre GBs et champs de Yang-Mills, pouvait fournir une description à basse énergie pour des théories où la brisure spontanée de la symétrie chirale suit un schéma différent de celui de la QCD. En particulier, lorsque la chaîne est longue, on obtient à l'ordre dominant non pas deux WSRs, mais autant de WSRs généralisées qu'il y a de résonances vectorielles massives produites par les mécanismes de Higgs multiples le long de la chaîne. Deux voies d'investigation semblent présenter un intérêt, mais n'ont pas été développées ici.

La première voie concerne à nouveau le lien avec l'EWSB: on peut constater des similitudes entre certaines relations obtenues en utilisant les *mooses* comme description du secteur de brisure électrofaible d'une part, et les expressions obtenues dans le contexte des modèles d'EWSB à cinq dimensions avec géométrie non-triviale et/ou conditions aux bords et/ou *branes*. De plus, les WSRs semblent être un autre aspect de l'amélioration du comportement à haute énergie remarqué par certains auteurs, que l'on peut aussi comprendre en termes de déconstruction dimensionnelle. La compréhension du lien entre la description effective et les modèles particuliers présentés dans la littérature récente n'est cependant pas encore très avancée: ceci constitue un champ à explorer.

Une autre voie possible est de prendre au sérieux ces LEET en tant qu'extension de la  $\chi$ PT. Dans ce cas, on est intéressé non pas par la limite d'une chaîne longue, qui produirait un grand nombre de résonances ne reproduisant pas les propriétés de la QCD, mais vraisemblablement, par le cas du *moose* avec deux sites de jauge ( $K = 2$ ). Le comptage de puissance imposé par le développement cohérent de la LEET ne permet pas une comparaison directe avec la QCD avec deux ou trois saveurs légères et trois couleurs. En revanche, cette théorie effective pourrait fournir un moyen d'aller au-delà de la limite  $N_c \rightarrow \infty$ , incluant les résonances  $\rho$  et  $a_1$  comme champs dynamiques dans la LEET.

# Annexe A

## Spineurs de Weyl, Dirac et Majorana

Les notations pour les spineurs sont généralement très bien définies dans les articles de revue traitant de la supersymétrie [Hab01].

Nous définissons ici nos notations et présentons un formulaire utile en vue de clarifier les propriétés de transformation des objets utilisés tout au long du manuscrit, pour lequel nous nous sommes conformés à l'usage du SM, qui est d'utiliser des spineurs de Dirac et leurs projections de chiralité.

### A.1 Remarques générales

On peut construire un spineur de Dirac à quatre composante par juxtaposition de deux spineurs de Weyl (*a priori* indépendants)  $\xi$  et  $\bar{\eta}$  (les notations seront expliquées en A.2). Les deux spineurs de Weyl ( $\xi_\alpha$  et  $\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}$ ) possèdent chacun deux composantes complexes ( $\alpha = 1, 2$  et  $\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$ ) et se transforment respectivement selon les représentations irréductibles  $(1/2, 0)$  et  $(0, 1/2)$  du groupe de Lorentz  $SO(3, 1)$  ou plutôt de son équivalent local  $SL(2, \mathbb{C})$ , c'est-à-dire qu'ils sont respectivement de chiralité gauche et droite. Le spineur de Dirac obtenu par cette juxtaposition est donné par

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \bar{\eta}^{\dot{1}} \\ \bar{\eta}^{\dot{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

et appartient à la représentation  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ . Son utilisation ne simplifie les manipulations algébriques que lorsque le terme de masse est restreint, suite à des lois de conservation, à prendre la forme

$$\mathcal{L}_{\text{masse Dirac}} = - (m_D \xi \eta + m_D^* \bar{\xi} \bar{\eta}). \quad (\text{A.2})$$

En effet, si l'on utilise des redéfinitions de phase sur les spineurs de Weyl, on peut obtenir une masse réelle en utilisant l'identité

$$\bar{\psi} \psi = \xi \eta + \bar{\xi} \bar{\eta}. \quad (\text{A.3})$$

En revanche, dans le cas général, l'utilisation des spineurs de Weyl, objets fondamentaux, est plus aisée. Nous considérons tout d'abord l'écriture en terme de spineurs de Weyl puis nous donnons le lien avec les spineurs de Dirac, afin de nous conformer à la pratique courante dans le cas du SM.

### A.2 Spineurs de Weyl

Les définitions entrant dans l'équation (A.1) sont les suivantes: on obtient la représentation  $(1/2, 0)$  à partir de la représentation inéquivalente  $(0, 1/2)$  par la conjugaison complexe

$$\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \equiv (\xi_\alpha)^* \in (0, 1/2), \quad (\text{A.4})$$

et vice-versa

$$\eta^\alpha \equiv (\bar{\eta}^{\dot{\alpha}})^* \in (1/2, 0). \quad (\text{A.5})$$

Les invariants de Lorentz sont obtenus par contraction des indices en utilisant la métrique

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

pour définir le scalaire

$$\xi\eta \equiv \xi^\alpha \eta_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \xi_\beta \eta_\alpha. \quad (\text{A.7})$$

Etant donnée la propriété d'anti-commutation des spineurs, on peut vérifier que le conjugué de  $\xi\eta$  est bien donné par l'expression

$$\bar{\xi}\bar{\eta} = \bar{\xi}_\alpha \bar{\eta}^\alpha = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}, \quad (\text{A.8})$$

où

$$\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Notons l'identité

$$\xi\eta = \eta\xi. \quad (\text{A.10})$$

En plus du terme (A.2), on peut construire des invariants de Lorentz plus généraux, de la forme

$$\mathcal{L}_{\text{masse générique}} = \mathcal{L}_{\text{masse Dirac}} - \frac{1}{2} (m_L \xi\xi + m_L^* \bar{\xi}\bar{\xi}) - \frac{1}{2} (m_R \eta\eta + m_R^* \bar{\eta}\bar{\eta}). \quad (\text{A.11})$$

Les termes supplémentaires par rapport à (A.2) sont appelés termes de masse de Majorana: si le fermion porte une charge, la conservation de cette dernière est violée par ces termes. On peut également écrire de façon compacte

$$\mathcal{L}_{\text{masse générique}} = -\frac{1}{2} \left( (\xi^\alpha, \eta^\alpha) \mathcal{M} \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta_\alpha \end{pmatrix} + (\bar{\xi}_\alpha, \bar{\eta}_\alpha) \mathcal{M}^\dagger \begin{pmatrix} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \right), \quad (\text{A.12})$$

avec la définition suivante pour la matrice de masse symétrique  $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Notons que les termes cinétiques correspondants sont donnés pour chaque spineur de Weyl par

$$\mathcal{L}_{\text{cinétique } L} = i \bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi = i \xi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\xi}, \quad (\text{A.14})$$

$$\mathcal{L}_{\text{cinétique } R} = i \bar{\eta} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta = i \eta \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\eta}, \quad (\text{A.15})$$

qui sont bien invariants de Lorentz, moyennant les définitions

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu = (\mathbb{1}_{2\times 2}, \vec{\sigma}), \quad (\text{A.16})$$

$$\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} = (\mathbb{1}_{2\times 2}, -\vec{\sigma}). \quad (\text{A.17})$$

La diagonalisation générale de la matrice de masse  $\mathcal{M}$  introduite en (A.13) donne les valeurs propres suivantes <sup>1</sup>

$$m_\pm = \frac{m_L + m_R \pm \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2}}{2}. \quad (\text{A.18})$$

Dans les cas d'intérêt pour les applications au secteur électrofaible (voir section 1.6.1), on peut donner les valeurs propres ainsi que les vecteurs propres dans un développement simultané en  $m_D/m_R$  et en  $\sqrt{m_L/m_R}$  pour trouver

$$m_+ \simeq m_R, \quad (\text{A.19})$$

$$m_- \simeq m_L - \frac{m_D^2}{m_R}, \quad (\text{A.20})$$

---

1. On suppose à présent que les différentes masses sont réelles. Si ce n'est pas le cas, on peut toujours utiliser des redéfinitions telles que les deux valeurs propres soient réelles.

avec les états propres correspondants <sup>2</sup>

$$v_+ \simeq \xi - \frac{m_D}{m_R} \eta, \quad (\text{A.21})$$

$$v_- \simeq \eta + \frac{m_D}{m_R} \xi. \quad (\text{A.22})$$

## A.3 Spineurs de Dirac

On peut réécrire tous ces résultats dans les notations habituelles du SM, qui utilisent les spineurs de Dirac. Commençons par les termes cinétiques: pour cela, on doit tout d'abord définir les matrices de Dirac selon

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.23})$$

ainsi que la matrice  $A$ , explicitement donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \\ \delta^\beta_\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.24})$$

à l'aide de laquelle on construit l'adjoint de Dirac du spineur à quatre composantes introduit en (A.1)

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger A = (\eta^\beta, \bar{\xi}_{\dot{\beta}}). \quad (\text{A.25})$$

Dans la représentation de Weyl, on a numériquement  $A = \gamma^0$ , mais cette égalité ne sera pas générale, les deux matrices n'agissant pas sur les mêmes indices spinoriels.

Avec ces notations, on peut établir la correspondance

$$i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi = \mathcal{L}_{\text{cinétique } L} + \mathcal{L}_{\text{cinétique } R}. \quad (\text{A.26})$$

Pour séparément décrire dans cette notation de Dirac les spineurs de Weyl correspondant aux deux représentations inéquivalentes du groupe de Lorentz contenues dans (A.1), on doit projeter les composantes de chiralités définies. Pour cela, il est utile d'introduire la matrice  $\gamma_5$  selon

$$\gamma_5 \equiv i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (\text{A.27})$$

Dans la représentation de Weyl utilisée en (A.1), on a

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -\delta^\beta_\alpha & 0 \\ 0 & \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

soit numériquement

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.29})$$

On définit ainsi à partir d'un spineur de Dirac à quatre composantes complexes

$$\psi_{L,R} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \psi. \quad (\text{A.30})$$

---

2. Si  $m_L \rightarrow 0$  dans (A.20), on doit effectuer une redéfinition supplémentaire pour obtenir le bon signe pour la masse.

ce qui donne, toujours dans la représentation de Weyl

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.31})$$

$$\psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\eta}^{\dot{1}} \\ \bar{\eta}^{\dot{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.32})$$

On a ainsi obtenu des spineurs à quatre composantes, de chiralité définie, à partir de nos spineurs de Weyl originaux. Bien que nous ayons utilisé explicitement la représentation de Weyl pour faire ce lien, on peut maintenant utiliser les projecteurs de chiralité dans n'importe quelle représentation. En particulier, on a

$$i \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \partial_\mu \psi = \mathcal{L}_{\text{cinétique } L}, \quad (\text{A.33})$$

$$i \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} \partial_\mu \psi = \mathcal{L}_{\text{cinétique } R}. \quad (\text{A.34})$$

Dans cette écriture, les termes de masse de (A.11) deviennent

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{masse générique}} &= - (m_D \bar{\psi}_R \psi_L + m_D^* \bar{\psi}_L \psi_R) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( m_L (\bar{\psi}_L)^c \psi_L + m_L^* \bar{\psi}_L (\psi_L)^c \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( m_R \bar{\psi}_R (\psi_R)^c + m_R^* (\bar{\psi}_R)^c \psi_R \right), \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

avec la notation usuelle pour le conjugué de charge d'un spineur de Dirac

$$\psi^c \equiv C \bar{\psi}^T = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.36})$$

où la matrice de conjugaison de charge est introduite afin de satisfaire

$$C^{-1} \gamma^\mu C = - \gamma^{\mu T}, \quad (\text{A.37})$$

ce qui impose

$$C = \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.38})$$

Dans cette représentation, on aura  $C = i \gamma^0 \gamma^2$ , avec toujours la même remarque sur la structure spinorielle.

Les termes de masses peuvent être écrits sous la forme

$$\mathcal{L}_{\text{masse générique}} = - \frac{1}{2} \left( \left( (\bar{\psi}_L)^c, \bar{\psi}_R \right) \mathcal{M} \begin{pmatrix} \psi_L \\ (\psi_R)^c \end{pmatrix} + \left( \bar{\psi}_L, (\bar{\psi}_R)^c \right) \mathcal{M}^\dagger \begin{pmatrix} (\psi_L)^c \\ \psi_R \end{pmatrix} \right), \quad (\text{A.39})$$

étant données les identités du type

$$(\bar{\psi}_L)^c (\psi_R)^c = \bar{\psi}_R \psi_L, \quad (\text{A.40})$$

qui sont évidentes lorsque l'on utilise les spineurs de Weyl.

## A.4 Spineurs de Majorana

Mentionnons brièvement une troisième notation: celle des spineurs de Majorana, que nous présentons ici par souci de comparaison avec la littérature. En réalité, un spineur de Majorana n'est qu'un spineur de Weyl en notation de Dirac: il s'agit de spineurs à quatre composantes (donc des spineurs de Dirac) dont les quatre composantes ne sont pas indépendantes, mais vérifient la relation

$$(\psi_{M i})^c = \psi_{M i} e^{i \varphi_i}, \quad (\text{A.41})$$

où la phase  $\varphi$  est appelée phase de création de Majorana. Ces spineurs n'ont donc que deux composantes complexes, que l'on peut en réalité représenter en termes d'un spineur de Weyl selon

$$\psi_{M1} = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ e^{-i\varphi_1} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.42})$$

Nous introduisons un deuxième spineur de Majorana

$$\psi_{M2} = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ e^{-i\varphi_2} \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.43})$$

Avec cette notation, le lagrangien que nous avons considéré auparavant s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{cinétique } L} + \mathcal{L}_{\text{cinétique } R} + \mathcal{L}_{\text{masse générique}} &= \frac{1}{2} (\overline{\psi_{M1}} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{M1} + \overline{\psi_{M2}} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{M2}) \\ &- \frac{1}{2} (\overline{\psi_{M1}}, \overline{\psi_{M2}}) M \begin{pmatrix} \psi_{M1} \\ \psi_{M2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

où la matrice de masse  $M$  est hermitienne

$$M^\dagger = M. \quad (\text{A.45})$$

La correspondance entre les constantes est la suivante

$$m_L = M_{11} e^{i\varphi_1}, \quad (\text{A.46})$$

$$m_R = M_{22} e^{i\varphi_2}, \quad (\text{A.47})$$

$$m_D = M_{12} e^{i\varphi_1} + M_{12}^* e^{i\varphi_2}, \quad (\text{A.48})$$

et l'on peut vérifier que le nombre de constantes indépendantes est identique dans chacune des écritures.

Précisons encore que la définition (A.42) est souvent écrite sous la forme

$$\psi_{M1} = \psi_L + e^{-i\varphi_1} (\psi_L)^c. \quad (\text{A.49})$$





# Annexe B

## Paramètres obliques et définitions liées

Dans cette appendice, nous rappelons la définition originale des paramètres  $S, T, U$  de Peskin-Takeuchi, puisque la notation de ces auteurs est la plus couramment employée. Nous précisons en quoi ces définitions peuvent être ambiguës, et faisons également le rapprochement avec d'autres définitions plus satisfaisantes pour des quantités similaires.

Dans toute cette annexe, les fonctions  $\Pi^{\text{NP}}$  sont définies comme les valeurs des fonctions à deux points dans un modèle donnée, auxquelles on a soustrait la valeur dans le SM  $\Pi^{\text{SM}}$ , avec une masse de Higgs  $m_H$  donnée. En d'autres termes, si l'on considère une *extension* du SM, ces fonctions ne contiennent que des contributions dues à la nouvelle physique. Cette approche suppose donc que l'on puisse séparer les contributions du SM à une boucle de celles de la nouvelle physique.

### B.1 Paramètre(s) $\rho$

Dans cette section, nous discutons tour à tour différentes définitions possibles liées au paramètre  $\rho$ .

#### B.1.1 $\rho_*(0)$

Nous avons déjà introduit le paramètre  $\rho_*(0)$  en (1.87), comme le rapport de l'intensité des couplages de Fermi pour les courants neutres à celle pour les courants chargés, dans la limite où le moment transféré par les bosons vecteurs intermédiaires ( $W^\pm, Z^0$  et autres boson vecteurs éventuels:  $W'^\pm, Z', \dots$ ) tendait vers zéro. En réalité, une définition plus générale permet d'accommoder une classe plus vaste de modèles: on écrit

$$\mathcal{L}_{\text{quatre fermions}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left( J_{\text{CC}\mu}^+ J_{\text{CC}\mu}^- + \rho_*(0) (J_3^\mu J_{3\mu} - 2s_*^2(0) J_3^\mu J_{Q\mu} + x^4 J_Q^\mu J_{Q\mu}) \right). \quad (\text{B.1})$$

Notons que l'on a normalisé le terme correspondant aux courants neutres à l'aide du terme quadratique en  $J_3^\mu$

$$J_3^\mu = \sum_{f=1}^6 \bar{\chi}_f \gamma^\mu \frac{\tau^3}{2} \chi_f. \quad (\text{B.2})$$

En revanche, le facteur  $x$  est laissé libre, car on peut avoir

$$x \neq s_*(0). \quad (\text{B.3})$$

Dans les modèles génériques,  $s_*(0)$  n'est pas directement lié à l'angle utilisé lors de la diagonalisation des termes quadratiques pour les bosons vecteurs, ni à leurs rapports de masses. D'autre part, même dans le SM, on a

$$s_*(0) \neq s_f, \quad (\text{B.4})$$

car  $s_f^2$  est lié aux couplages effectifs évalués au pôle du  $Z^0$ , et non dans la limite de moment de transfert nul. La définition des courants chargés utilisée dans l'expression (B.34) est inchangée

$$J_{\text{CC}}^{\mu\pm} = \sum_{f=1}^6 \bar{\chi}_f \gamma^\mu \tau^\mp \left( \frac{1-\gamma^5}{2} \right) \chi_f. \quad (\text{B.5})$$

La formule (B.1) définit également la constante de Fermi  $G_F$ .

Finalement, le lien avec le paramètre  $T$  (voir l'annexe B.3), dans les approximations de [PT92], est donné par

$$\rho_*(0) = 1 + \alpha T. \quad (\text{B.6})$$

Une contrainte que les théories sans particule de Higgs doivent satisfaire est que le paramètre  $\rho$  soit égal à un en arbres

$$\rho_*(0)|_{\text{arbres}} = 1, \quad (\text{B.7})$$

afin de ne pas apporter de corrections trop importantes aux relations valables dans le SM. Ceci nécessite en général une symétrie custodiale, comme mentionné à la section 1.3.3. Certains modèles (en particulier les modèles *little Higgs*) se contentent d'une version approchée de la relation (B.7).

### B.1.2 $\rho$

On voit souvent apparaître la définition suivante du paramètre  $\rho$

$$\rho = \frac{M_W^2}{c^2 M_Z^2}, \quad (\text{B.8})$$

où  $c$  est le cosinus de l'angle de Weinberg. Le problème est le suivant: dans le SM, l'angle de Weinberg n'est unique qu'au niveau des arbres, au delà, on peut en donner plusieurs expressions (voir section B.2). Or, dans le SM en arbres, le membre de droite est par définition égal à 1, c.f. (1.91). Au delà du SM, il faudrait également préciser la définition de l'angle de Weinberg: on peut par exemple utiliser la définition (B.34) avec le sinus  $s_0$  défini en (B.11).

## B.2 Sinus effectif(s) de l'angle de Weinberg

Dans cette section, nous discutons tour à tour différentes définitions effectives du sinus de l'angle de Weinberg, utiles hors du cadre du SM.

### B.2.1 $s_f$

Le sinus effectif  $s_f$  (dénote  $\bar{s}_f$  dans la référence [PDG]) est extrait des couplages des fermions au  $Z^0$ , mesurés au pôle du  $Z^0$ . À partir des asymétries mesurées dans la réaction  $e^+ e^- \rightarrow f \bar{f}$  au pôle du  $Z^0$ , on extrait expérimentalement les couplages effectifs  $g_{V,A}^f$  des fermions au  $Z^0$  à l'échelle donnée par la masse de ce dernier. Le sinus effectif  $s_f$  est obtenu en appliquant entre  $g_V^f, g_A^f$  et  $s_f$  la même relation que celles valables en arbres dans le SM entre  $g_v^f, g_a^f$  et  $s$ . dans le cas particulier des leptons chargés,  $s_\ell = s_{f=\ell}$  sera donné par

$$s_\ell^2 = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{g_V^\ell}{g_A^\ell} \right). \quad (\text{B.9})$$

Cette définition est utilisée à l'annexe B.4 pour simplifier les écritures. Elle a également un sens physique, puisqu'elle est directement liée aux couplages effectifs qui sont des pseudo-observables utilisées dans les EWPTs (voir section 1.5.3.1).

### B.2.2 $s_*(0)$

Ce paramètre a déjà été introduit à la suite de l'équation (B.34). Précisons que c'est cet angle qui est directement testé lors des expériences de diffusion de neutrinos sur des nucléons à basse énergie <sup>1</sup>.

### B.2.3 $s_W$

La définition de Sirlin, aussi dite *on-shell* sert en général uniquement à rendre certaines écritures plus compactes

$$s_W^2 = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}. \quad (\text{B.10})$$

D'un point de vue pratique, cette grandeur n'est pas connue très précisément, du fait des incertitudes sur la mesure de  $M_W$ .

### B.2.4 $s_0$

Nous utilisons la notation originale  $s_0$ : la référence [PDG] utilise la notation  $s_{M_Z}$ . Cette définition sert également à rendre les écritures plus compactes <sup>2</sup>

$$s_0^2 (1 - s_0^2) = \frac{\pi \alpha^{\text{exp}}(M_Z)}{\sqrt{2} G_\mu M_Z^2}, \quad (\text{B.11})$$

où

$$\frac{1}{\alpha^{\text{exp}}(M_Z)} = 128.92 \pm 0.03, \quad (\text{B.12})$$

donnant

$$s_0^2 = 0.23105 \mp 0.00008. \quad (\text{B.13})$$

## B.3 Approximations et définitions originales

Partant de l'équation (1.41) donnant les couplages des bosons vecteurs aux courants fermioniques, on utilise la notation équivalente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{interactions courants}} &= e J_Q^\mu A_\mu + \frac{e}{s_c} (J_3^\mu - s^2 J_Q^\mu) Z_\mu \\ &+ \frac{e}{\sqrt{2} s} ((J_1^\mu + i J_2^\mu) W_\mu^+ + (J_1^\mu - i J_2^\mu) W_\mu^-). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

On définit alors les fonctions à deux points transverses  $\Pi_{XY}^{\text{NP}}$ , pour  $(X, Y) = (1, 1), (3, 3), (3, Q)$  et  $(Q, Q)$

$$\begin{aligned} i \int dx e^{iq \cdot x} \langle 0 | T J_X^\mu(x) J_Y(0) | 0 \rangle &= (q_\mu q_\nu - \eta_{\mu\nu} q^2) (\Pi_{XY}^{\text{SM}}(q^2) + \Pi_{XY}^{\text{NP}}(q^2)) \\ &+ q_\mu q_\nu \Pi_{XY}^L(q^2). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

La partie longitudinale  $\Pi_{XY}^L$  n'intervient pas dans la suite, étant donné que les applications concernent les fermions pour lesquels  $m_f \ll M_W$ . En général,  $\Pi_{XY}$  contient un pôle, comme on peut le voir avec (1.62). On effectue un développement en puissance des impulsions que l'on tronque au deuxième ordre

$$\Pi_{XY}^{\text{NP}}(q^2) = \frac{A_{XY}}{q^2} + F_{XY} + \mathcal{O}(q^2), \quad (\text{B.16})$$

1. Rappelons cependant que les résultats de l'expérience NuTeV [M<sup>+</sup>03] sont exprimés, dans le cadre du SM, en termes de  $s_W^2$  afin d'atténuer la dépendance en  $m_t$  [DFG<sup>+</sup>02] des expressions théoriques.

2. Il ne s'agit pas là du  $s_0$  défini dans [PT92], qui utilise la valeur de  $\alpha(0)$  et l'évolution due au SM jusqu'à  $\mu = M_Z$ .

ce qui est une bonne approximation si la nouvelle physique apparaît à une échelle au-delà de  $M_W$ . Notons que l'on a, du fait des identités de Ward de la QED

$$A_{3Q} = 0, \quad (\text{B.17})$$

$$A_{QQ} = 0, \quad (\text{B.18})$$

ce qui implique que nous avons six constantes supplémentaires par rapport au SM

$$A_{11}, A_{33}, F_{11}, F_{33}, F_{3Q}, F_{QQ}. \quad (\text{B.19})$$

Cependant, on peut aisément voir que trois combinaisons sont absorbées dans la définition des trois paramètres d'entrée de l'ajustement électrofaible  $\alpha$ ,  $G_F$  et  $M_Z$ , donnant une contribution respectivement dénotée par  $\delta\alpha, \delta G_F, \delta M_Z^2$  à l'expression théorique de chacune de ces observables, où

$$\frac{\delta\alpha}{\alpha} = -e^2 F_{QQ}, \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\delta G_F}{G_F} = -\frac{e^2}{s^2} \frac{A_{11}}{M_W^2}, \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} = \frac{e^2}{c^2 s^2} \left( \frac{A_{33}}{M_Z^2} + F_{33} - 2s^2 F_{3Q} + s^4 F_{QQ} \right). \quad (\text{B.22})$$

Il reste donc trois combinaisons physiques qui vont s'introduire dans les prédictions des autres observables, s'ajoutant aux contributions du SM. On définit dans les approximations considérées

$$T \equiv \frac{4\pi}{s^2 c^2} \frac{A_{11} - A_{33}}{M_Z^2} = \frac{\hat{\epsilon}_1}{\alpha}, \quad (\text{B.23})$$

$$S \equiv 16\pi (F_{33} - F_{3Q}) = \frac{4s^2}{\alpha} \hat{\epsilon}_3, \quad (\text{B.24})$$

$$U \equiv 16\pi (F_{11} - F_{33}) = -\frac{4s^2}{\alpha} \hat{\epsilon}_2, \quad (\text{B.25})$$

où nous avons également donné la correspondance avec les notations  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  de [AB91] modifiées en  $\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2, \hat{\epsilon}_3$  comme présenté dans la référence [PDG] afin de n'inclure que les déviations du SM <sup>3</sup>.

En réalité, la référence [PDG] définit des quantités similaires sans approximation, à partir de la contribution de la physique nouvelle aux énergies propres des bosons vecteurs

$$\alpha T = \frac{\Pi_{WW}^{\text{NP}}(0)}{M_W^2} - \frac{\Pi_{ZZ}^{\text{NP}}(0)}{M_Z^2}, \quad (\text{B.26})$$

$$\frac{\alpha}{4s^2 c^2} S = \frac{\Pi_{ZZ}^{\text{NP}}(M_Z^2) - \Pi_{ZZ}^{\text{NP}}(0)}{M_Z^2}, \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{\alpha}{4s^2} (S + U) = \frac{\Pi_{WW}^{\text{NP}}(M_W^2) - \Pi_{WW}^{\text{NP}}(0)}{M_W^2}. \quad (\text{B.28})$$

On peut voir que, dans le cadre de l'approximation (B.16), ces définitions sont équivalentes.

La suite de la procédure consiste à effectuer l'ajustement de paramètre du SM. On ne peut cependant pas indépendamment ajuster les paramètres  $S, T, U$  et  $m_H$ : les paramètres obliques décrivent les déviations par rapport au SM, et on doit donc nécessairement préciser la valeur de  $m_H$  dans le SM, qui est donc fixe. Les limites actuelles sur les paramètres obliques sont les suivantes, pour le cas  $m_H = 115.6$  GeV [Lan04]

$$S = -0.14 \pm 0.10, \quad (\text{B.29})$$

$$T = -0.15 \pm 0.12, \quad (\text{B.30})$$

$$U = +0.32 \pm 0.12. \quad (\text{B.31})$$

<sup>3</sup>. Notons que les définitions originales des paramètres  $\epsilon_i$  de [AB91] ne faisaient pas appel au SM: elles étaient définies comme corrections à l'approximation de Born.

## B.4 Définition en termes d'observables

L'introduction des paramètres obliques conduit finalement à modifier une égalité entre des combinaisons d'observables, valable dans le SM, mais qui ne le sera plus en présence de nouvelle physique. On peut donc choisir, suivant [SCW98], de définir les paramètres obliques comme corrections à ces relations. D'une part, ceci n'implique pas d'approximation, hormis que l'on choisit d'introduire uniquement trois tels paramètres, le but étant que les définitions soient compatibles avec celles de l'annexe B.3 dans le cas particulier où ces dernières s'appliquent. D'autre part, une telle définition en termes d'observables permet d'éviter les ambiguïtés. Dans le cas où l'on utilise un lagrangien effectif par exemple, la paramétrisation n'est pas unique [NS00], puisque l'on peut utiliser les équations de mouvement pour réécrire le lagrangien effectif en termes d'une autre base d'opérateurs. Dans le cadre des théories effectives sans Higgs, on devra utiliser une telle définition en termes d'observables.

A partir du sinus effectif  $s_\ell$  défini par les couplages des leptons au pôle du  $Z^0$  (voir section B.2.1), on introduit le paramètre  $T_{\text{obs}}$  selon

$$\Gamma(Z^0 \rightarrow \ell^+ \ell^-) = \frac{G_\mu M_Z^3}{24 \sqrt{2} \pi} (1 - 4 s_\ell^2 + 8 s_\ell^4) (1 + \alpha^{\text{exp}}(M_Z) T_{\text{obs}}). \quad (\text{B.32})$$

Les différentes quantités apparaissant dans cette définition doivent être extraites de l'expérience: en particulier, on utilise la valeur expérimentale de  $\alpha$  mesurée à la masse du  $Z^0$ . Celle-ci est moins précisément connue que la valeur de  $\alpha$  à la masse du  $Z^0$  évaluée dans le schéma  $\overline{\text{MS}}$  et dans le cadre du SM à partir de  $\alpha(0)$  extrait du moment magnétique anormal de l'électron. L'avantage est en revanche que l'on se débarrasse de toute référence à un modèle particulier, excepté pour ce qui est de l'extraction des pseudo-observables à partir de l'expérience, voir section 1.5.2. Pour ce qui est des autres pseudo-observables, on n'a pas utilisé  $s$  mais  $s_f$  défini en termes des couplages effectifs  $g_{V,A}$  tels qu'ils sont extraits des mesures de l'asymétrie avant-arrière leptonique au pôle du  $Z^0$ . De même,  $G_\mu$  est extrait de la durée de vie du muon.

Pour ce qui est de la définition d'un paramètre correspondant à  $S$ , on considère

$$s_f^2 = s_0^2 - \frac{s_0^2 (1 - s_0^2)}{1 - 2 s_0^2} \alpha^{\text{exp}}(M_Z) T_{\text{obs}} + \frac{1}{4 (1 - 2 s_0^2)} \alpha^{\text{exp}}(M_Z) S_{\text{obs}}, \quad (\text{B.33})$$

où  $s_0$  est donné par la définition de l'annexe B.2.4. Finalement, il nous faut également introduire le paramètre  $U_{\text{obs}}$  selon

$$\frac{1}{1 - s_0^2} \frac{M_W^2}{M_Z^2} = 1 + \frac{1 - s_0^2}{1 - 2 s_0^2} \alpha^{\text{exp}}(M_Z) T_{\text{obs}} - \frac{1}{2 (1 - 2 s_0^2)} \alpha S_{\text{obs}} + \frac{1}{4 s_0^2} \alpha^{\text{exp}}(M_Z) U_{\text{obs}}. \quad (\text{B.34})$$

On peut montrer que, si l'on injecte les définitions de [PT92], les paramètres  $S, T, U$  vérifient les équations définissantes (B.32), (B.33) et (B.34) pour  $S_{\text{obs}}, T_{\text{obs}}, U_{\text{obs}}$ .



# Annexe C

## Remarques sur la technicouleur

Le premier modèle qui a été inventé pour décrire l'EWSB sans Higgs est la technicouleur. Ce modèle est directement basée sur la QCD, avec cependant des échelles différentes. On peut donc utiliser la connaissance phénoménologique de la  $\chi$ PT pour déduire des limites sur les constantes entrant dans la théorie effective décrivant la technicouleur. Le principe est le suivant [HT90, DEH91, Geo91, EH92, PT92]: aux termes cinétiques de la théorie de Yang-Mills  $SU(2)_w \times U(1)_Y$ , on ajoute le lagrangien effectif pour le secteur de brisure de cette symétrie électrofaible, décrivant un triplet de GBs issu de la brisure  $SU(2) \times SU(2) \rightarrow SU(2)$ . Jusque là, l'hypothèse essentielle est que le secteur de brisure possède la symétrie custodiale, mais le lagrangien effectif est encore tout-à-fait général, puisqu'il décrit toute théorie possédant la même symétrie et les trois mêmes GBs.

Le fait que la technicouleur ne serait qu'une version à plus haute échelle est traduit comme suit. On utilise les valeurs phénoménologiques des constantes de basse énergie de la  $\chi$ PT ( $L_i$  de (2.77)), telles qu'elles ont été extraites des expériences de physique hadronique à basse énergie. Essentiellement, on doit adapter

$$f_0 \rightarrow f = 246 \text{ GeV}, \quad (\text{C.1})$$

les constantes adimensionnées de basse énergie  $L_i$  étant en revanche directement utilisées avec les mêmes valeurs qu'en  $\chi$ PT<sup>1</sup>. Le couplage entre le secteur de brisure et le secteur de jauge est alors introduit avec, en plus de l'identification (2.111) pour les champs de jauge  $SU(2)$ , l'identification du champ de jauge de l'hypercharge selon

$$L_\mu = g' b_\mu^0 \frac{\tau^3}{2}. \quad (\text{C.2})$$

Cette identification étant faite, on constate que l'opérateur multiplié par la constante  $L_{10}$  dans le lagrangien  $\mathcal{L}_4$  donné en (2.77) s'écrit ici

$$g g' L_{10} b_{\mu\nu}^0 \langle \Sigma^\dagger \tau^3 \Sigma G^{\mu\nu} \rangle. \quad (\text{C.3})$$

Cet opérateur va donc donner une contribution en arbres au paramètre  $S$  (comme l'opérateur correspondant dans le cas du SM (1.121)).

$$\Delta S = -16\pi L_{10}. \quad (\text{C.4})$$

On doit cependant prendre en compte les contributions du lagrangien  $\mathcal{O}(p^2)$  en boucles. La constante  $L_{10}$  est cependant dépendante d'échelle (voir équations (2.87) et (2.93)): cette dépendance d'échelle est compensée par le fait que l'on soustrait la valeur de la même fonction à deux points dans le cas du SM, elle-même dépendante d'échelle, pour obtenir [PT92]

$$S = -16\pi \left( L_{10}^r(\mu) + \frac{1}{192\pi^2} \left( \ln \frac{m_H^2}{\mu^2} - \frac{1}{6} \right) \right). \quad (\text{C.5})$$

On peut alors donner une estimation du paramètre  $S$  en technicouleur avec trois techni-couleurs, utilisant la valeur phénoménologique de  $L_{10}$  suivante [BEG94]

$$L_{10}(M_\rho) \simeq -(5.5 \pm 0.7) \times 10^{-3}, \quad (\text{C.6})$$

qui devrait nous donner la valeur de  $L_{10}$  en technicouleur à la masse du techni-rho. Utilisant la valeur de référence  $m_H = 115 \text{ GeV}$ , on trouve une contribution au paramètre  $S$  positive et d'ordre  $0.2 \sim 0.3$ . Par comparaison avec la figure 1.3, on voit que ces valeurs ne sont pas favorisées.

---

1. Modulo d'éventuels modifications du nombre de couleurs  $N_c \rightarrow N_{TC}$  (et de saveurs) dont les conséquences sur les  $L_i$ 's peuvent être estimées (en utilisant la limite de grand nombre de couleurs [tH74, RV77, Wit79, GL85]).



Notons que ce raisonnement ne fait pas intervenir le secteur fermionique: nous n'avons pas eu à discuter la technicouleur étendue, qui pose elle aussi des problèmes, que les modèles de *walking technicolor* et technicouleur assistée par *topcolor* cherchent à résoudre. La multitude de modèles possibles est précisément une motivation pour la construction d'une théorie effective cherchant à dégager des remarques générales: un modèle particulier correspondra à un jeu de valeurs données pour les constantes de basse énergie dans le lagrangien effectif. On voit en particulier que  $f$  est fixée, mais les constantes  $\mathcal{O}(p^4)$  dépendront du modèle sous-jacent. Par exemple, les constantes de basse énergie dans le cas de la technicouleur sont différentes de celles obtenues dans la limite  $m_H \rightarrow \infty$  [Nyf99]. Nous verrons au chapitre 5 que les modèles viables devront expliquer la suppression de tout un ensemble de constantes, en liaison avec une symétrie.

# Annexe D

## Remarques sur la limite $g \rightarrow 0$

Nous rassemblons ici quelques discussions concernant la cohérence des écritures, liées à la limite  $g \rightarrow 0$ . Ces points ont été mentionnés rapidement dans le corps du texte, afin d'éviter les digressions. Nous présentons ici les réponses à des questions qui peuvent se poser à la lecture du chapitre 3, c'est-à-dire pour le cas d'une théorie de Yang-Mills SU(2) massive.

### D.1 Normalisation des termes de sources

A la section (3.1), nous avons introduit les sources  $L_\mu$  et  $R_\mu$ , puis le champ  $G_\mu$ . Nous avons également vu que  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}/g$  était bien défini dans la limite  $g \rightarrow 0$ . En revanche, on peut vérifier explicitement que la division de  $L_{\mu\nu}$  par  $g$  ne serait pas cohérente: ceci reviendrait à permettre les termes suivants dans l'expression (3.8) de  $\mathcal{L}_2$

$$-\frac{\zeta}{g^2} \langle L_{\mu\nu} \Sigma G^{\mu\nu} \Sigma^\dagger \rangle - \frac{\kappa}{2g^2} \langle L_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \rangle = \mathcal{O}(p^2). \quad (\text{D.1})$$

La présence de ces termes conduirait à des contributions singulières dans la limite  $g \rightarrow 0$  à la fonction à deux points des courants  $J_L^{a\mu}$ , puisque l'on trouverait

$$\begin{aligned} i \int dx e^{ip \cdot x} \langle 0 | T J_L^{a\mu}(x) J_L^{b\nu}(0) | 0 \rangle &= (\eta^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) \\ &\times \left\{ (1 + \zeta)^2 \frac{M^2}{g^2} \frac{1}{k^2 - M^2} - \frac{1}{g^2} (\kappa - \zeta^2) \right\} + \mathcal{O}(p^1). \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

La transversité de ce résultat est garantie par les identités de Ward. De plus, l'identité champ-courant (3.48) serait modifiée en

$$\left. \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta L_\nu^a} \right|_{L_\sigma^b=0} = -\frac{M^2}{g} W^{a\nu} + \frac{\zeta}{g} \partial_\mu (\partial^\mu W^{a\nu} - \partial^\nu W^{a\mu} + g \varepsilon^{abc} W^{b\mu} W^{c\nu}) + \mathcal{O}(p^2). \quad (\text{D.3})$$

L'expression du courant conservé deviendrait donc également singulière dans la limite  $g \rightarrow 0$ . Notons en revanche que l'expression de la charge conservée serait inchangée, puisque le terme supplémentaire dans (D.3) est une dérivée totale, donnant pour la charge un terme de surface n'impliquant que des particules massives.

On exclut donc l'apparition de tels termes dans  $\mathcal{L}_2$ . On pourrait continuer cette analyse terme par terme, mais elle deviendrait rapidement malaisée: la conclusion est que la source non-dynamique  $L_\mu$  ne peut être divisée par une constante de couplage, si l'on veut que les courants de symétrie  $J_L^{a\mu}$  de la théorie sous-jacente et leurs fonctions de corrélations hors de la couche de masse restent bien définis dans la limite  $g \rightarrow 0$ .

Le formalisme du chapitre 5 permettra d'introduire de façon claire la distinction entre champs et sources dès le début. Le couplage sera alors introduit via des spurions.

### D.2 Ecriture directe du lagrangien effectif en jauge unitaire

Si l'on souhaite travailler directement en termes des champs  $W_\mu$ , on voit que la règle d'écriture du lagrangien effectif est la suivante: en termes des objets

$$g W_\mu \mapsto L(g W_\mu) L^\dagger, \quad (\text{D.4})$$

$$L_\mu \mapsto L L_\mu L^\dagger + i L \partial_\mu L^\dagger, \quad (\text{D.5})$$

on doit inclure tous les opérateurs invariants et bien définis dans la limite  $g \rightarrow 0$ . Le point est que la détermination des objets bien définis dans cette dernière limite fait référence à l'écriture initiale, et à la définition de  $W_\mu$  selon (3.37)

$$g W_\mu = i \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger + g \Sigma G_\mu \Sigma^\dagger - L_\mu, \quad (\text{D.6})$$

qui montre que  $W_\mu$  seul sans puissance de  $g$  ne sera pas bien défini. Ceci explique que le terme de masse que l'on peut écrire contienne toujours un facteur  $g^2$ , ce qui est crucial pour la cohérence du développement. En revanche, en formant une combinaison appropriée de dérivées de  $W_\mu$ , on peut définir un objet ne nécessitant pas de multiplication par  $g$

$$\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - i g [W_\mu, W_\nu] + \frac{1}{g} (\partial_\mu L_\nu - \partial_\nu L_\mu). \quad (\text{D.7})$$

En ajoutant les termes appropriés, on rend cette combinaison covariante, et on obtient une de nos briques élémentaires, qui n'est autre que

$$W_{\mu\nu} + \frac{1}{g} L_{\mu\nu} = \Sigma G_{\mu\nu} \Sigma^\dagger. \quad (\text{D.8})$$

Bien sur, les matrices suivantes sont également bien définies séparément dans la limite  $g \rightarrow 0$ , et covariantes

$$g W_{\mu\nu} = \mathcal{O}(p^2), \quad (\text{D.9})$$

$$L_{\mu\nu} = \mathcal{O}(p^2). \quad (\text{D.10})$$

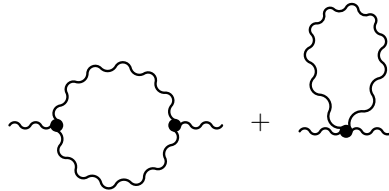
On retrouve donc en particulier le résultat que le lagrangien  $\mathcal{O}(p^2)$  le plus général se mettra sous la forme

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2} \left\langle \left( W_{\mu\nu} + \frac{1}{g} L_{\mu\nu} \right) \left( W^{\mu\nu} + \frac{1}{g} L^{\mu\nu} \right) \right\rangle + \kappa \langle (g W_\mu) (g W^\mu) \rangle, \quad (\text{D.11})$$

après avoir imposé la normalisation du terme cinétique. L'identification avec l'expression (3.40) est établie en posant  $\kappa = f^2/4$ . Notons que ceci redonne bien le lagrangien  $\mathcal{L}_2$  sans les termes supplémentaires (D.1), comme il se doit.

### D.3 Divergences quartiques

Dans le calcul de la fonction à deux points effectué à la section 3.3.2, on peut vérifier explicitement l'annulation bien connue des divergences quartiques, si l'on conserve jusqu'au bout les expressions contenant  $\int dk = \delta^{(4)}(0)$ , malgré le fait que l'on utilise la régularisation dimensionnelle. Cette annulation est due à une compensation entre les deux diagrammes de la figure D.1, qui est due à la structure de Yang-Mills de la théorie, indépendamment du fait que les bosons vecteurs aient acquis une masse: en particulier, l'annulation ne nécessite pas la présence d'un boson de Higgs physique [AQ72, KL73, CLT73, Jog74, CLT74, Hoř94].



**Figure D.1.** Diagrammes à une boucle pour la fonction à deux points.

Si l'on utilise une régularisation autre que la régularisation dimensionnelle, les contributions à la masse des bosons vecteurs prendraient la forme suivante dans le cas où des divergences quadratiques et quartiques seraient présentes

$$\delta M^2 = g^2 \left( x M^2 \ln \left( \frac{M^2}{\Lambda_{\text{cut-off}}^2} \right) + y \Lambda_{\text{cut-off}}^2 + z \frac{\Lambda_{\text{cut-off}}^4}{M^2} \right), \quad (\text{D.12})$$

où  $\Lambda_{\text{cut-off}}$  est la coupure ultraviolette des intégrales (*cut-off*), et  $x, y, z$  sont des constantes numériques <sup>1</sup>.

En réalité, le point important concerne les puissances de  $M$ , qui portent un comptage chirale, et non les puissances du *cut-off*: on déduit ici les premières en fonction des secondes. On voit que les deux premiers termes contiennent des puissances de  $g$ , étant donné que  $M^2 = g^2 f^2/4$ . En revanche, ce n'est pas le cas du dernier terme, puisque l'analyse dimensionnelle montre que la divergence quartique doit être divisée par une puissance de  $M^2$ , et que  $g^2/M^2 = 4/f^2 = \mathcal{O}(p^0)$ . Ceci illustre la nécessité que les champs vecteurs considérés comme degrés de liberté à basse énergie dans la LEET soient introduits en tant que champs de Yang-Mills, pour éviter les divergences quartiques. Si cela n'était pas le cas, la renormalisation de la masse rendrait caduque le comptage de puissance nécessaire pour le développement à basse énergie:  $M^2 = \mathcal{O}(p^2)$ . En revanche, la masse acquise par les champs de jauge lors du mécanisme de Higgs (même sans boson de Higgs physique) est donc protégée, de même que pour les fermions chiraux et les GBs, entraînant une renormalisation multiplicative. Ceci justifie la discussion de la section 2.4.2.1 concernant les champs utilisés pour décrire les degrés de liberté de la LEET.

---

1. Le facteur global  $g^2$  provient des vertex.



# Annexe E

## Compléments sur le noyau de la chaleur

Dans cette annexe, nous présentons des détails sur la méthode du noyau de la chaleur pour l'extraction des divergences à une boucle. Tout d'abord, à l'annexe E.1, nous donnons les expressions pour les puissances inverses et le logarithme d'un opérateur, comme intégrale sur un paramètre (le *temps propre*  $s$ ). L'annexe E.2 rassemble les valeurs des coefficients du développement en puissance de  $s$  de la fonction  $\Omega_\nu^\mu(s, z)$  apparaissant en (3.91). L'annexe E.3 présente les résultats nécessaires à l'évaluation des divergences des intégrales sur  $s$  en régularisation dimensionnelle. Ces deux sections sont nécessaires pour obtenir les résultats de la section 3.3.1, détaillés à l'annexe E.4. Les résultats interviennent également dans l'annexe E.5, dans laquelle nous présentons les grandes lignes de la dérivation alternative des divergences, mentionnée à la section 3.3.1.

### E.1 Puissances d'un opérateur

Nous présentons ici, d'après [BV85], des relations utiles pour les sections 3.3.1, E.4 et E.5.

Considérant un opérateur tel que  $\mathcal{F}$  donné en (3.61), on peut traiter le paramètre  $M^2$  comme une variable, que nous dénotons par  $m^2$

$$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(m^2). \quad (\text{E.1})$$

On définit alors l'inverse de l'opérateur en introduisant l'intégrale sur le temps propre selon

$$\mathcal{F}(m^2)^{-1} = i \int_0^{+\infty} ds e^{-is\mathcal{F}(m^2)}, \quad (\text{E.2})$$

toujours avec la prescription pour définir l'intégrale

$$m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon. \quad (\text{E.3})$$

On obtient le logarithme de  $\mathcal{F}$ , à une constante infinie près, en intégrant sur  $m^2$

$$\ln \mathcal{F}(M^2) = - \int_{M^2}^{+\infty} dm^2 \mathcal{F}(m^2)^{-1}. \quad (\text{E.4})$$

Injectant (E.2) dans (E.4), puis intervertissant les intégrales sur  $s$  et sur  $m^2$ , on obtient à l'aide de (3.61)

$$\ln \mathcal{F}(M^2) = - \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s} e^{-is\mathcal{F}(M^2)}. \quad (\text{E.5})$$

Pour ce qui est des puissances inverses, on va au contraire utiliser la dérivée par rapport à  $m^2$

$$\mathcal{F}(M^2)^{-n} = \frac{-1}{(n-1)!} \left( \frac{d}{dm^2} \right)^{n-1} \mathcal{F}(m^2)^{-1} \Big|_{m^2=M^2}. \quad (\text{E.6})$$

Ceci donne les expressions suivantes, une fois utilisée la relation (E.2)

$$\mathcal{F}(M^2)^{-n} = \frac{i^n}{(k-1)!} \int_0^{+\infty} ds s^{n-1} e^{-is\mathcal{F}(M^2)}. \quad (\text{E.7})$$

## E.2 Coefficients de Schwinger-DeWitt pour l'opérateur $\mathcal{D}$

On considère l'opérateur

$$\mathcal{D}_\nu^\mu = \eta_\nu^\mu (d^\rho d_\rho + M^2) + 2\Gamma_\nu^\mu, \quad (\text{E.8})$$

avec

$$d_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu + \Gamma_\mu^{ab}. \quad (\text{E.9})$$

On s'intéresse aux coefficients  $a_{n\nu}^\mu(z)$  intervenant dans le développement de la fonction  $\Omega_\nu^\mu(s, z)$  en puissances de  $s$

$$\Omega_\nu^\mu(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-is)^n a_{n\nu}^\mu(z), \quad (\text{E.10})$$

où cette fonction est définie selon

$$\left( e^{-is\mathcal{D}(M^2)} \right)_\nu^\mu \delta^{(d)}(z) = \frac{i^{(1-d/2)}}{(4\pi s)^{\frac{d}{2}}} e^{-i\frac{z^2}{4s}} \Omega_\nu^\mu(s, z). \quad (\text{E.11})$$

Par application répétée des relations de récurrence obtenues en considérant la dérivée par rapport à  $s$  de cette définition <sup>1</sup>, puis en posant  $z=0$ , on obtient tous calculs faits les expressions suivantes.

$$a_0^{\mu\nu}(0) = \eta^{\mu\nu}, \quad (\text{E.12})$$

$$d_\rho a_0^{\mu\nu}(0) = 0, \quad (\text{E.13})$$

$$d_\rho d_\sigma a_0^{\mu\nu}(0) = \frac{1}{2} \Gamma_{\rho\sigma} \eta^{\mu\nu}, \quad (\text{E.14})$$

$$d_\tau d_\rho d_\sigma a_0^{\mu\nu}(0) = \frac{1}{2} ([d_\tau, \Gamma_{\rho\sigma}] + [d_\rho, \Gamma_{\tau\sigma}]) \eta^{\mu\nu}, \quad (\text{E.15})$$

$$d^\rho d_\rho d_\sigma d_\sigma a_0^{\mu\nu}(0) = \frac{1}{2} \Gamma^{\rho\sigma} \Gamma_{\rho\sigma} \eta^{\mu\nu}, \quad (\text{E.16})$$

$$a_1^{\mu\nu}(0) = 2\Gamma^{\mu\nu} + M^2 \eta^{\mu\nu}, \quad (\text{E.17})$$

$$d_\rho a_1^{\mu\nu}(0) = [d_\rho, \Gamma^{\mu\nu}] - \frac{1}{6} [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\rho}] \eta^{\mu\nu}, \quad (\text{E.18})$$

$$\begin{aligned} d_\rho d_\sigma a_1^{\mu\nu}(0) &= \frac{1}{12} \eta^{\mu\nu} (\Gamma_{\rho\tau} \Gamma_\sigma^\tau + \Gamma_{\sigma\tau} \Gamma_\rho^\tau - [d_\rho, [d^\tau, \Gamma_{\tau\sigma}]] - [d_\sigma, [d^\tau, \Gamma_{\tau\rho}]]) \\ &+ \frac{1}{3} [\Gamma^{\mu\nu}, \Gamma_{\rho\sigma}] + \Gamma_{\rho\sigma} \Gamma^{\mu\nu} + \frac{2}{3} [d_\rho, [d_\sigma, \Gamma^{\mu\nu}]] + \frac{1}{2} M^2 \Gamma_{\rho\sigma} \eta^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

$$\begin{aligned} a_2^{\mu\nu}(0) &= \frac{1}{12} \Gamma^{\rho\sigma} \Gamma_{\rho\sigma} \eta^{\mu\nu} + \frac{1}{3} [d^\rho, [d_\rho, \Gamma^{\mu\nu}]] + 2\Gamma^{\mu\rho} \Gamma_{\rho\nu} \\ &+ \frac{1}{2} M^4 \eta^{\mu\nu} + 2M^2 \Gamma^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

Ces expressions sont nécessaires pour les calculs des sections 3.3.1, E.4 et E.5.

## E.3 Régularisation dimensionnelle pour les intégrales sur le temps propre

Dans cette section, nous présentons la méthode utilisée pour régulariser les intégrales sur le temps propre  $s$ , du type de celles intervenant en (3.78): il s'agit d'une forme de régularisation dimensionnelle. Les résultats concernant ces intégrales sont également nécessaires aux calculs des sections 3.3.1, E.4 et E.5.

1. La relation de récurrence a déjà été donnée en (3.92-3.93).

Considérons l'intégrale suivante impliquant une fonction  $f(s)$  analytique en  $s=0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2+k}} f(s), \quad \text{pour } k = -1, 0, 1. \quad (\text{E.21})$$

On suppose que ces intégrales convergent en  $s = +\infty$ . En revanche, elles sont divergente en  $s=0$  pour  $d=4$ . Dans le cas  $k = -1$ , l'intégrale converge pour  $\text{Re}(d) < 4$ : on intègre donc par parties dans ce domaine. Dans le cas des sections 3.3.1 et E.4, on se ramène toujours à l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-1}} \stackrel{\text{pôle}}{=} -\frac{2}{d-4}. \quad (\text{E.22})$$

Pour l'annexe E.5, nous aurons également besoin d'appliquer la même technique à des intégrales où la fonction  $f$  de (E.21) est définie comme une intégrale sur  $m^2$ . Définissant le prolongement analytique en  $s$  en permettant les intégrations par parties dans le domaine de convergence et négligeant les termes de bords, on a explicitement

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-1}} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^2} e^{-ism^2} \stackrel{\text{pôle}}{=} \frac{4}{(d-4)^2} + \frac{2\gamma}{d-4} + \frac{2\ln M^2}{d-4}, \quad (\text{E.23})$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2}} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^2} e^{-ism^2} \stackrel{\text{pôle}}{=} -i \frac{M^2}{d-4}, \quad (\text{E.24})$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2+1}} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^2} e^{-ism^2} \stackrel{\text{pôle}}{=} -\frac{M^4}{2} \frac{1}{d-4}. \quad (\text{E.25})$$

En pratique, les intégrales présentant un double pôle, telle (E.26), apparaîtront dans les calculs avec un coefficient  $d-4$ . On reconnaît d'autre part le terme familier  $\ln M^2$  et celui impliquant la constante d'Euler  $\gamma$ . Nous aurons besoin de certaines intégrales pour des puissances de  $m$  au dénominateur allant jusqu'à  $m^{10}$ : la procédure pour évaluer les pôles implique toujours l'intégration par parties sur  $s$ . On trouve pour  $1 \leq l \leq 4$

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-1}} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^{2(l+1)}} e^{-ism^2} \stackrel{\text{pôle}}{=} -\frac{2}{l} \frac{1}{M^{2l}} \frac{1}{d-4}. \quad (\text{E.26})$$

Nous aurons également besoin des expressions

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2}} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^4} e^{-ism^2} \stackrel{\text{pôle}}{=} -i \left( \frac{4}{(d-4)^2} + \frac{2\gamma}{d-4} + \frac{2\ln M^2}{d-4} \right), \quad (\text{E.27})$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2}} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^6} e^{-ism^2} \stackrel{\text{pôle}}{=} i \frac{2}{M^2} \frac{1}{d-4}. \quad (\text{E.28})$$

## E.4 Détails sur les calculs de la section 3.3.1.2

Rappelons que seuls les quatre premiers termes dans la série du membre de droite de (3.88) ou (3.85) donneront des divergences, d'où l'utilité du développement en question: on doit tenir compte d'un nombre fini de termes. Ceci est dû au fait que l'opérateur  $\mathcal{M}$  contient une seule dérivée libre. Pour considérer les divergences ultraviolettes, on peut se placer dans l'espace des impulsions: le propagateur  $\mathcal{D}^{-1}$  correspond à deux puissances inverses dans la limite des grandes impulsions. Tenant compte de l'intégrale quadri-dimensionnelle, on voit que seuls les termes  $n \leq 4$  donnent des divergences. Ceci se vérifie explicitement lorsque l'on considère les intégrales sur  $s$ . Nous donnons à présent quelques étapes du calcul.



L'utilisation de la formule (3.88), que nous reproduisons ici

$$\ln(\mathcal{D} + \mathcal{M}) = \ln \mathcal{D} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \mathcal{M}_n \mathcal{D}^{-n}. \quad (\text{E.29})$$

avec

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}, \quad (\text{E.30})$$

$$\mathcal{M}_{n+1} = \mathcal{M} \mathcal{M}_n + [\mathcal{D}, \mathcal{M}_n] \quad \text{pour } n \geq 1, \quad (\text{E.31})$$

implique l'évaluation de traces de dérivées  $d_\mu$  appliquées aux puissances inverses de l'opérateur  $\mathcal{D}$ . Schématiquement, une fois que l'on a fait commuter toutes les dérivées à droite dans l'expression des  $\mathcal{M}_n$ , on va obtenir (en utilisant (E.7)) des expressions de la forme

$$d_{\mu_1} \dots d_{\mu_k} (\mathcal{D}^{-n})^\mu \delta^{(d)}(z) = \frac{i^{(n+1-d/2)}}{(4\pi)^{d/2} (n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-n+1}} e^{-i\frac{z^2}{4s}} \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_n} \Omega^\mu_\nu(s, z), \quad (\text{E.32})$$

où l'on a utilisé l'écriture (E.11) et défini

$$\nabla_\mu = e^{i\frac{z^2}{4s}} d_\mu e^{-i\frac{z^2}{4s}} = d_\mu - i \frac{z_\mu}{2s}. \quad (\text{E.33})$$

### Terme $n = 1$

A l'aide de ces préliminaires, on peut donner l'expression du terme  $n = 1$  dans (E.29)

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \text{Tr} (\mathcal{M}_1 \mathcal{D}^{-1}) &= \frac{i}{2M^2} \int dx \left\langle [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}] d_\nu (\mathcal{D}^{-1})^{\nu\mu} \delta^{(d)}(x-y) \Big|_{y=x} \right\rangle \\ &= \frac{i^{(3-d/2)}}{2M^2 (4\pi)^{d/2}} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2}} e^{-i\frac{z^2}{4s}} \left\langle [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}] \nabla_\nu \Omega^{\nu\mu}(s, x-y) \Big|_{y=x} \right\rangle \\ &\stackrel{\text{pôle}}{=} -\frac{1}{2M^2 (4\pi)^2} \int dx \\ &\times \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2}} \langle [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}] d_\nu a_0^{\nu\mu}(0) \rangle - i \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-1}} \langle [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}] d_\nu a_1^{\nu\mu}(0) \rangle \right\} \\ &\stackrel{\text{pôle}}{=} -\frac{1}{d-4} \frac{1}{16\pi^2} \frac{5}{6M^2} \int dx \langle [d_\rho, \Gamma^{\rho\mu}] [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\mu}] \rangle. \end{aligned} \quad (\text{E.34})$$

### Terme $n = 2$

Pour évaluer le terme  $n = 2$ , il nous faut tout d'abord l'expression de  $\mathcal{M}_2$  (le terme  $M^2$  dans  $\mathcal{D}$  est diagonal, et donc peut être omis dans le commutateur)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{2\nu}^\mu &= \mathcal{M}_\rho^\mu \mathcal{M}_\nu^\rho + [d^\rho d_\rho, \mathcal{M}_\nu^\mu] + 2 (\Gamma_\rho^\mu \mathcal{M}_\nu^\rho - \mathcal{M}_\rho^\mu \Gamma_\nu^\rho) \\ &= \frac{1}{M^2} \{ -[d_\sigma, \Gamma^{\sigma\mu}] [d^\rho, \Gamma_{\rho\nu}] + [d_\rho, [d^\rho, [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\mu}]] d_\nu \} \\ &+ \frac{2}{M^2} \{ \Gamma^{\mu\rho} [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\rho}] d_\nu + [d^\tau, [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\mu}]] d_\tau d_\nu \} \\ &+ \frac{1}{M^4} [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\mu}] [d_\rho, \Gamma^{\rho\tau}] d_\tau d_\nu. \end{aligned} \quad (\text{E.35})$$

On obtient

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{4} \text{Tr} (\mathcal{M}_2 \mathcal{D}^{-2}) &= -\frac{i}{4} \int dx \left\langle \mathcal{M}_{2\nu\mu} (\mathcal{D}^{-2})^{\mu\nu} \delta^{(d)}(x-y) \Big|_{y=x} \right\rangle \\
&= -\frac{i^{(-d/2)}}{4} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-1}} \left\langle \mathcal{M}_{2\nu\mu} e^{-i\frac{z^2}{4s}} \Omega^{\mu\nu}(s, x-y) \Big|_{y=x} \right\rangle \\
&\stackrel{\text{pôle}}{=} \frac{1}{4} \frac{1}{16\pi^2} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-1}} \\
&\times \left\langle -\frac{1}{M^2} [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\nu}] [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}] a_0^{\mu\nu}(0) + \frac{2}{M^2} [d^\lambda, [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\nu}]] d_\lambda d_\mu a_0^{\mu\nu}(0) \right. \\
&+ \frac{1}{M^4} [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\nu}] [d^\rho, \Gamma_{\rho\lambda}] d^\lambda d_\mu a_0^{\mu\nu}(0) \\
&- \left. \frac{1}{M^2} [d_\mu, [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\nu}]] a_1^{\mu\nu} - \frac{1}{2M^4} [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\nu}] [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}] a_1^{\mu\nu} \right\rangle \\
&\stackrel{\text{pôle}}{=} \frac{1}{d-4} \frac{1}{16\pi^2} \int dx \\
&\times \left\langle \frac{1}{4M^2} \langle [d_\rho, \Gamma^{\rho\mu}] [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\mu}] \rangle + \frac{1}{4M^4} [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}] \Gamma^{\mu\lambda} [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\lambda}] \right\rangle.
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les expressions (E.12-E.20).

### Terme $n = 3$

L'évaluation du terme  $n = 3$  requiert uniquement la connaissance de tous les termes de  $\mathcal{M}_3$  ayant exactement deux dérivées  $d_\mu$  libres <sup>2</sup>. En effet, on voit que, dans l'expression

$$\begin{aligned}
\frac{i}{6} \text{Tr} (\mathcal{M}_3 \mathcal{D}^{-3}) &= \frac{i}{6} \int dx \left\langle \mathcal{M}_{3\nu\mu} (\mathcal{D}^{-3})^{\mu\nu} \delta^{(d)}(x-y) \Big|_{y=x} \right\rangle \\
&= \frac{i^{1-d/2}}{12} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-2}} \left\langle \mathcal{M}_{3\nu\mu} e^{-i\frac{z^2}{4s}} \Omega^{\mu\nu}(s, x-y) \Big|_{y=x} \right\rangle, \quad (\text{E.36})
\end{aligned}$$

on doit encore faire apparaître une puissance de  $s$  au dénominateur pour obtenir une divergence. Cette puissance de  $s$  peut apparaître lorsque deux dérivées  $d$  de  $\mathcal{M}_3$  agissent sur l'exponentielle  $e^{-i\frac{z^2}{4s}}$ . Seul le terme  $a_0^{\mu\nu}$  du développement de  $\Omega^{\mu\nu}(s, z)$  donnera des divergences, les autres introduisant des puissances de  $s$  au numérateur. On trouve l'expression suivante pour  $\mathcal{M}_3$ , après avoir omis parmi ces termes ceux qui ne donneront qu'une dérivée totale, et après avoir fait commuter les dérivées à droite

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{3\nu\mu} \Big|_{d^2} &= \frac{2}{M^2} [d_\sigma, [d^\rho, \Gamma_{\rho\nu}]] \Gamma^{\tau\sigma} d_\mu d_\tau + \frac{4}{M^2} \Gamma_{\nu\rho} [d^\lambda, [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\rho}]] d_\lambda d_\mu \\
&+ \frac{1}{M^4} [d^\rho, \Gamma_{\rho\nu}] [d^\lambda, [d_\lambda, [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\tau}]]] d_\tau d_\mu + \frac{2}{M^4} [d^\rho, \Gamma_{\rho\nu}] [d_\tau, [d^\lambda, [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\tau}]]] d_\lambda d_\mu \\
&+ \frac{2}{M^4} [d^\rho, \Gamma_{\rho\nu}] \Gamma^{\tau\lambda} [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\lambda}] d_\tau d_\mu + \frac{2}{M^4} [d^\rho, \Gamma_{\rho\nu}] [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\lambda}] \Gamma^{\tau\lambda} d_\mu d_\tau \\
&+ \frac{2}{M^4} \Gamma_{\nu\rho} [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\rho}] [d_\tau, \Gamma^{\tau\lambda}] d_\lambda d_\mu \\
&+ \frac{1}{M^6} [d^\rho, \Gamma_{\rho\nu}] [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\tau}] [d^\tau, [d_\alpha, \Gamma^{\alpha\lambda}]] d_\lambda d_\mu. \quad (\text{E.37})
\end{aligned}$$

<sup>2</sup>  $\mathcal{M}_3$  contient également des termes avec trois puissances de dérivées libres. Ces termes ne peuvent générer de divergences, du fait du résultat (E.13). En revanche, on doit évaluer les termes de  $\mathcal{M}_3$  contenant trois puissances de dérivées libres pour obtenir  $\mathcal{M}_4$ .

Dans ce cas, la seule contribution non-nulle provient, d'après (E.33), du remplacement  $d_\alpha d_\beta \rightarrow -i/(2s) \eta_{\alpha\beta}$ . On trouve, après avoir constaté que certaines contributions se compensent

$$\begin{aligned}
\frac{i}{6} \text{Tr} (\mathcal{M}_3 \mathcal{D}^{-3}) &\stackrel{\text{pôle}}{=} -\frac{i^{2-d/2}}{24} \frac{1}{16\pi^2} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-1}} \\
&\times \left\langle \frac{2}{M^4} [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}] [d_\tau, [d^\mu, [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\tau}]]] + \frac{1}{M^4} [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}] [d^\lambda, [d_\lambda, [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\mu}]]] \right. \\
&+ \left. \frac{2}{M^4} [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}] \Gamma^{\mu\lambda} [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\lambda}] + \frac{1}{M^6} [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}] [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\tau}] [d^\tau, [d_\alpha, \Gamma^{\alpha\mu}]] \right\rangle \\
&\stackrel{\text{pôle}}{=} \frac{1}{d-4} \frac{1}{16\pi^2} \int dx \\
&\times \left\langle -\frac{1}{12M^4} [d_\tau, [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}]] [d^\tau, [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\mu}]] - \frac{1}{6M^4} [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}] \Gamma^{\mu\lambda} [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\lambda}] \right. \\
&+ \left. \frac{1}{24M^6} [[d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}], [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\tau}]] [d^\tau, [d_\alpha, \Gamma^{\alpha\mu}]] \right\rangle. \tag{E.38}
\end{aligned}$$

#### Terme $n = 4$

Les seules divergences provenant du terme  $n = 4$  correspondent à avoir quatre dérivées  $d_\mu$  libres dans l'expression de  $\mathcal{M}_4$ , afin d'introduire deux puissances de  $s$  au dénominateur dans

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{8} \text{Tr} (\mathcal{M}_4 \mathcal{D}^{-4}) &= -\frac{i}{8} \int dx \left\langle \mathcal{M}_{4\nu\mu} (\mathcal{D}^{-4})^{\mu\nu} \delta^{(d)}(x-y) \Big|_{y=x} \right\rangle \\
&= \frac{i^{(1-d/2)}}{48} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int dx \int \frac{ds}{s^{d/2-3}} \\
&\times \left\langle \mathcal{M}_{4\nu\mu} e^{-i\frac{z^2}{4s}} \Omega^{\mu\nu}(s, x-y) \Big|_{y=x} \right\rangle. \tag{E.39}
\end{aligned}$$

Omettant à nouveau les termes de  $\mathcal{M}_4$  qui donneront des termes de surfaces pour les divergences

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{4\nu\mu}|_{d^4} &= \frac{4}{M^4} [d^\rho, \Gamma_{\rho\nu}] [d^\tau, [d^\lambda, [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\alpha}]]] d_\alpha d_\lambda d_\mu d_\tau \\
&+ \frac{1}{M^8} [d^\rho, \Gamma_{\rho\nu}] [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\alpha}] [d_\tau, \Gamma^{\tau\beta}] [d_\lambda, \Gamma^{\lambda\gamma}] d_\alpha d_\beta d_\gamma d_\mu. \tag{E.40}
\end{aligned}$$

On effectue ensuite le remplacement suivant dans cette expression de  $\mathcal{M}_4$

$$d_\alpha d_\beta d_\gamma d_\delta \rightarrow -\frac{1}{4s^2} (\eta_{\alpha\beta} \eta_{\gamma\delta} + \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\delta} + \eta_{\alpha\delta} \eta_{\beta\gamma}). \tag{E.41}$$

On trouve ainsi, tous calculs faits

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{8} \text{Tr} (\mathcal{M}_4 \mathcal{D}^{-4}) &\stackrel{\text{pôle}}{=} \frac{1}{d-4} \frac{1}{16\pi^2} \int dx \\
&\times \left\langle \frac{1}{12M^4} [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}] \Gamma^{\mu\nu} [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\nu}] + \frac{1}{24M^4} [d_\tau, [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}]] [d^\tau, [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\mu}]] \right. \\
&- \frac{1}{192M^8} [d_\rho, \Gamma^{\rho\mu}] [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\nu}] [d^\tau, \Gamma_{\tau\mu}] [d^\lambda, \Gamma_{\lambda\nu}] \\
&- \left. \frac{1}{96M^8} [d_\rho, \Gamma^{\rho\mu}] [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\mu}] [d^\tau, \Gamma_{\tau\nu}] [d_\lambda, \Gamma^{\lambda\nu}] \right\rangle. \tag{E.42}
\end{aligned}$$

On voit également explicitement que les termes  $n \geq 5$  ne donneront pas de divergences en dimension  $d = 4$  dans l'intégrale sur  $s$ . La puissance  $s^{d/2-n+1}$  au dénominateur, provenant des expressions (E.7) et (E.11), ne sera pas accompagnée de suffisamment d'autres puissances de  $s$  provenant de l'application des dérivées  $d_\mu$ .

Additionnant toutes les contributions divergentes, y compris celles données en (3.84) et (3.95), on obtient le résultat final (3.96), regroupant toutes les divergences à une boucle de la théorie de Yang-Mills massive.

## E.5 Dérivation alternative des divergences à une boucle

Cette section présente une autre dérivation des divergences à une boucle, suivant une méthode plus générale que celle utilisée à la section 3.3.1. Dans ce cas, on n'utilise non pas l'expression (E.2) pour le logarithme de l'opérateur, mais celle faisant appel à son inverse (E.4).

### E.5.1 Méthode

On cherche une écriture de l'opérateur  $\mathcal{G}$  satisfaisant

$$\mathcal{F}_\nu^\mu \mathcal{G}_\rho^\nu = \eta_\rho^\mu, \quad (\text{E.43})$$

afin d'utiliser cet opérateur  $\mathcal{G}$  ou un certain développement à préciser dans l'expression

$$\ln \mathcal{F}(M^2) = - \int_{M^2}^{+\infty} dm^2 \mathcal{G}(m^2), \quad (\text{E.44})$$

où l'on a généralisé les opérateurs en tant que fonctions d'une variable  $m^2$  ne coïncidant pas nécessairement avec la masse  $M^2$ . On utilise le résultat (3.68)

$$\mathcal{F}\mathcal{K} = \mathcal{D} + \mathcal{M}, \quad (\text{E.45})$$

pour obtenir le développement suivant pour l'inverse  $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G}(m^2) = \mathcal{K}(m^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathcal{M}_n(m^2) \mathcal{D}(m^2)^{-(n+1)}, \quad (\text{E.46})$$

avec les mêmes définitions des opérateurs  $\mathcal{M}_n$  que précédemment (E.30-E.31), excepté pour le remplacement  $M^2 \rightarrow m^2$ , et l'ajout de

$$(\mathcal{M}_0^{ab})_\nu^\mu = \delta^{ab} \eta_\nu^\mu. \quad (\text{E.47})$$

Dans cette formulation, on utilise directement l'expression (E.46) en l'injectant dans l'intégrale (E.44). Les formules comporteront donc une intégrale sur  $m^2$ . L'autre différence avec la méthode des sections 3.3.1 et E.4 est que l'on doit encore appliquer l'opérateur  $\mathcal{K}$ , dont la contribution n'est plus séparée cette fois. Comptant les puissances des impulsions en jeu dans la limite ultraviolette, on peut de nouveau s'apercevoir que seuls les termes  $n \leq 4$  produiront des divergences<sup>3</sup>.

On peut de plus écrire  $\mathcal{K}$  en une somme de deux termes selon

$$\mathcal{K}(m^2)_\nu^\mu = \eta_\nu^\mu + \frac{d^\mu d_\nu}{m^2}. \quad (\text{E.48})$$

on voit que les divergences pour les termes  $n \geq 3$  pourront uniquement provenir de l'application du second terme du membre de droite de (E.48). Nous présentons ces remarques afin de justifier l'utilité du développement (E.46) utilisé, mais également pour montrer jusqu'à quel ordre on aura effectivement besoin de pousser ce développement. La présence ou l'absence de divergences se retrouvera explicitement dans les intégrales sur  $s$  lors des calculs. Pour effectuer l'intégration sur  $m^2$ , il est souhaitable d'avoir la dépendance en cette variable apparente. On écrira donc

$$\left( e^{-is\mathcal{D}(m^2)} \right)_\nu^\mu \delta^{(d)}(z) = \frac{i^{(1-d/2)}}{(4\pi s)^{\frac{d}{2}}} e^{-ism^2} e^{-i\frac{z^2}{4s}} \hat{\Omega}_\nu^\mu(s, z), \quad (\text{E.49})$$

où l'on a défini

$$\hat{\Omega}_\nu^\mu(s, z) = \Omega_\nu^\mu(s, z)|_{M^2=0}. \quad (\text{E.50})$$

En effet, l'évaluation de la trace fonctionnelle de l'expression (E.46) impliquera les expressions des puissances inverses de l'opérateur  $\mathcal{D}(m^2)$ , impliquant elle-mêmes son exponentielle, d'après (E.7). Les coefficients du développement de Taylor de  $\hat{\Omega}_\nu^\mu(s, z)$ , définis par

$$\hat{\Omega}_\nu^\mu(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-is)^n \hat{a}_{n\nu}^\mu(z), \quad (\text{E.51})$$

---

3. Rappelons que  $\mathcal{M}_n$  contient jusqu'à  $n$  dérivées  $d_\mu$  libres.

seront donnés par

$$\hat{a}_{n\nu}^\mu(z) = a_{n\nu}^\mu(z)|_{M^2=0}. \quad (\text{E.52})$$

De même, les expressions correspondant à (E.12-E.20) seront immédiatement déduites en posant  $M^2=0$ . L'équation que l'on utilisera ensuite est

$$\begin{aligned} d_{\mu_1} \cdots d_{\mu_k} \left( \mathcal{D}(m^2)^{-n} \right)_\nu^\mu \delta^{(d)}(z) &= \frac{i^{(n+1-d/2)}}{(4\pi)^{d/2} (n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2+1-n}} \\ &\times e^{-ism^2} e^{-i\frac{z^2}{4s}} \nabla_{\mu_1} \cdots \nabla_{\mu_n} \hat{\Omega}_\nu^\mu(s, z), \end{aligned} \quad (\text{E.53})$$

dans laquelle on injectera le développement (E.51). De telles expressions apparaîtront dans la formule (E.46) de l'inverse  $\mathcal{G}(m^2)$ , qu'il faudra ensuite intégrer sur  $m^2$  selon (E.44) avant de prendre la trace. Nous donnons à présent les différentes contributions.

### E.5.2 Contributions aux divergences

Nous évaluons successivement les différentes contributions présentes dans l'expression (E.44), séparément pour les deux termes de (E.48), puis intégrant sur  $m^2$  et prenant la trace. Pour obtenir ces résultats, on utilise les expressions (E.23-E.28). Précisons que ces calculs ont été vérifiés indépendamment en les programmant en langage FORM [Ver00].

#### Termes $n=0$

Le premier terme dans le développement (E.44) est

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{2} \int_{M^2}^{+\infty} dm^2 \text{Tr} \left( \mathcal{D}(m^2)^{-1} \right) \\ &= -\frac{i^{(3-d/2)}}{2(4\pi)^{d/2}} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2}} \int_{M^2}^{+\infty} dm^2 e^{-ism^2} \left\langle \hat{\Omega}_\mu^\mu(s, 0) \right\rangle \\ &\stackrel{\text{pôle}}{=} -\frac{i^{(2-d/2)}}{2(4\pi)^\omega} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-1}} e^{-isM^2} \left\langle \frac{1}{s^2} \hat{a}_{0\mu}^\mu(0) - \frac{i}{s} \hat{a}_{1\mu}^\mu(0) - \hat{a}_{2\mu}^\mu(0) \right\rangle \\ &\stackrel{\text{pôle}}{=} \frac{5}{3} \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{d-4} \int dx \langle \Gamma^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{E.54})$$

Appliquant maintenant le terme  $d^\mu d_\nu / m^2$  de  $\mathcal{K}_\nu^\mu$ , on a

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{2} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^2} \text{Tr} \left( d^\mu d_\nu \left( \mathcal{D}(m^2)^{-1} \right)_\mu^\nu \right) \\ &= -\frac{i^{(3-d/2)}}{2(4\pi)^{d/2}} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2}} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^2} e^{-ism^2} \left\langle \nabla^\nu \nabla_\mu \hat{\Omega}_\nu^\mu(s, x-y) \Big|_{y=x} \right\rangle \\ &\stackrel{\text{pôle}}{=} -\frac{i^{(3-d/2)}}{2(4\pi)^{d/2}} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-1}} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^2} e^{-ism^2} \\ &\times \left\{ -\frac{i}{s^2} \hat{a}_{0\mu}^\mu(0) + \frac{1}{s} \left( -\frac{1}{2} \hat{a}_{1\mu}^\mu(0) + d^\nu d_\mu \hat{a}_{0\nu}^\mu(0) \right) \right. \\ &+ \left. i \left( \frac{1}{2} \hat{a}_{2\mu}^\mu(0) + d^\nu d_\mu \hat{a}_{1\nu}^\mu(0) \right) \right\} \\ &\stackrel{\text{pôle}}{=} -\frac{i^{(-d/2)}}{(4\pi)^{d/2}} \left( \frac{2}{(d-4)^2} + \frac{\gamma + \ln M^2}{d-4} \right) \frac{d-4}{24} \int dx \langle \Gamma^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu} \rangle \\ &\stackrel{\text{pôle}}{=} \frac{1}{12} \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{d-4} \int dx \langle \Gamma^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{E.55})$$

**Termes  $n = 1$** 

L'expression de  $\mathcal{M}_1(m^2)_\mu^\nu$  étant donnée en (3.70) par  $1/m^2 [d_\rho, \Gamma^{\rho\nu}] d_\mu$ , on trouve

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{2} \int_{M^2}^{+\infty} dm^2 \text{Tr} \left( \mathcal{M}_1(m^2) \mathcal{D}(m^2)^{-2} \right) \\
&= \frac{i^{(-d/2)}}{2(4\pi)^{d/2}} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-1}} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^2} e^{-ism^2} \left\langle [d_\rho, \Gamma^{\rho\nu}] \nabla_\mu \hat{\Omega}_\nu^\mu(s, x-y) \Big|_{y=x} \right\rangle \\
&\stackrel{\text{pôle}}{=} \frac{i^{(-d/2)}}{2(4\pi)^{d/2}} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-1}} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^2} e^{-ism^2} \langle [d_\rho, \Gamma^{\rho\nu}] d_\mu \hat{a}_{0\nu}^\mu(0) \rangle \\
&\stackrel{\text{pôle}}{=} 0.
\end{aligned} \tag{E.56}$$

Pour la contribution correspondante impliquant le deuxième terme de (E.48), on doit faire commuter les dérivées covariantes  $d$  à droite. On obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{2} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^2} \text{Tr} \left( d^\mu d_\rho \mathcal{M}_{1\nu}^\rho \left( \mathcal{D}(m^2)^{-2} \right)_\mu^\nu \right) \\
&= \frac{i^{(-d/2)}}{2(4\pi)^{d/2}} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-1}} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^4} e^{-ism^2} \\
&\times \left\langle ([d_\sigma, \Gamma^{\sigma\rho}] d^\nu + [d^\nu, [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\rho}]] \nabla_\rho \nabla_\mu \hat{\Omega}_\nu^\mu(z) \Big|_{y=x} \right\rangle \\
&\stackrel{\text{pôle}}{=} \frac{i^{(-d/2)}}{2(4\pi)^{d/2}} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-1}} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^4} e^{-ism^2} \\
&\times \left\langle [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\rho}] d_\nu d_\rho d_\mu \hat{a}_0^{\mu\nu}(0) - \frac{1}{2} [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\rho}] (\eta_{\rho\nu} d_\mu + \eta_{\rho\mu} d_\nu + \eta_{\nu\mu} d_\rho) \hat{a}_1^{\mu\nu}(0) \right. \\
&+ [d^\nu, [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\rho}]] \left( d_\rho d_\mu \hat{a}_{0\nu}^\mu(0) - \frac{i}{2s} \hat{a}_{0\rho\nu}(0) - \frac{1}{2} \hat{a}_{1\rho\nu}(0) \right) \Big\rangle \\
&\stackrel{\text{pôle}}{=} -\frac{1}{3M^2} \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{d-4} \int dx \langle [d_\mu, \Gamma^{\mu\rho}] [d^\nu, \Gamma_{\nu\rho}] \rangle.
\end{aligned} \tag{E.57}$$

**Termes  $n = 2$** 

L'expression de  $\mathcal{M}_2(m^2)$  est obtenue en remplaçant  $M^2$  par  $m^2$  dans (E.35). On trouve

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{2} \int_{M^2}^{+\infty} dm^2 \text{Tr} \left( \mathcal{M}_2(m^2) \mathcal{D}(m^2)^{-3} \right) \\
&= -\frac{i^{(1-d/2)}}{4(4\pi)^{d/2}} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-2}} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^2} e^{-ism^2} \\
&\times \left\langle \left( 2[d^\tau, [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\nu}]] + \frac{1}{m^2} [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\nu}] [d_\rho, \Gamma^{\rho\tau}] \right) \nabla_\tau \nabla_\mu \hat{\Omega}^{\mu\nu}(s, x-y) \Big|_{y=x} \right\rangle \\
&\stackrel{\text{pôle}}{=} \frac{i^{(2-d/2)}}{4(4\pi)^{d/2}} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-1}} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^2} e^{-ism^2} \\
&\times \left\langle \left( [d_\mu, [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\nu}]] + \frac{1}{2m^2} [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\nu}] [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}] \right) \hat{a}_{0\nu}^\mu(0) \right\rangle \\
&\stackrel{\text{pôle}}{=} -\frac{1}{4M^2} \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{d-4} \int dx \langle [d_\mu, \Gamma^{\mu\rho}] [d^\nu, \Gamma_{\nu\rho}] \rangle.
\end{aligned} \tag{E.58}$$

Succinctement, on a également

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{2} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^2} \text{Tr} \left( d^\mu d_\rho \mathcal{M}_{2\nu}^\rho \left( \mathcal{D}(m^2)^{-3} \right)^\nu{}_\mu \right) \\
& = -\frac{i^{(1-d/2)}}{4(4\pi)^{d/2}} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-2}} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^4} e^{-ism^2} \\
& \times \left\langle \left( -[d_\sigma, \Gamma^{\sigma\rho}] [d^\tau, \Gamma_{\tau\mu}] \nabla_\nu \nabla_\rho + 2[d^\tau, [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\rho}]] \nabla_\nu \nabla_\rho \nabla_\tau \nabla_\mu \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{m^2} [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\lambda}] [d_\rho, \Gamma^{\rho\tau}] \nabla_\nu \nabla_\lambda \nabla_\tau \nabla_\mu \right) \hat{\Omega}^{\mu\nu}(s, x-y) \Big|_{y=x} \right\rangle \\
& \stackrel{\text{pôle}}{=} \frac{i^{(1-d/2)}}{8(4\pi)^{d/2}} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-1}} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^4} e^{-ism^2} \\
& \times \left\langle \left( i(d-1) + \frac{1}{s} \frac{d+2}{2m^2} \right) [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\mu}] [d^\tau, \Gamma_{\tau\mu}] + \frac{d}{2m^2} [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\mu}] [d^\rho, \Gamma_{\rho\nu}] \Gamma^{\mu\nu} \right\rangle \\
& \stackrel{\text{pôle}}{=} -\frac{1}{4M^4} \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{d-4} \int dx \langle [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\mu}] [d^\rho, \Gamma_{\rho\nu}] \Gamma^{\mu\nu} \rangle. \tag{E.59}
\end{aligned}$$

### Termes $n=3$

Comme déjà mentionné auparavant, seul le terme de  $\mathcal{K}_\nu^\mu$  impliquant  $d^\mu d_\nu/m^2$  va donner une contribution divergente. Les seuls termes de  $\mathcal{M}_3$  nécessaires sont donnés en (E.37). Comme tous les termes de  $\mathcal{M}_3$  ne contribuent pas explicitement, nous écrivons directement les termes contribuant au pôle en  $d=4$

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{2} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^2} \text{Tr} \left( d^\mu d_\rho \mathcal{M}_{3\nu}^\rho \left( \mathcal{D}(m^2)^{-4} \right)^\nu{}_\mu \right) \\
& \stackrel{\text{pôle}}{=} \frac{i^{(2-d/2)}}{12(4\pi)^{d/2}} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-1}} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^6} e^{-ism^2} \\
& \times \left\langle \frac{6}{4} [d_\tau, [d_\rho, \Gamma^{\rho\mu}]] [d^\tau, [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\mu}]] + \frac{12}{4} [d^\mu, [d^\rho, \Gamma_{\rho\nu}]] [d^\nu, [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\mu}]] \right. \\
& \left. - \frac{12}{4} [d_\rho, \Gamma^{\rho\mu}] \Gamma_{\mu\nu} [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\nu}] - \frac{6}{4m^2} [d^\rho, \Gamma_{\rho\lambda}] [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\tau}] [d^\tau, [d_\alpha, \Gamma^{\alpha\lambda}]] \right\rangle \\
& \stackrel{\text{pôle}}{=} -\frac{1}{4M^4} \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{d-4} \int dx \\
& \times \left\langle \frac{1}{2} [d_\tau, [d_\rho, \Gamma^{\rho\mu}]] [d^\tau, [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\mu}]] + [d^\mu, [d^\rho, \Gamma_{\rho\nu}]] [d^\nu, [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\mu}]] \right. \\
& \left. - [d_\rho, \Gamma^{\rho\mu}] \Gamma_{\mu\nu} [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\nu}] - \frac{1}{3M^2} [d^\rho, \Gamma_{\rho\lambda}] [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\tau}] [d^\tau, [d_\alpha, \Gamma^{\alpha\lambda}]] \right\rangle. \tag{E.60}
\end{aligned}$$

### Termes $n=4$

De même que précédemment, les seuls termes contribuant aux divergences sont ceux qui font intervenir quatre dérivées, pour lesquelles on pourra effectuer le remplacement (E.41)

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{2} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^2} \text{Tr} \left( d^\mu d_\rho \mathcal{M}_{4\nu}^\rho \left( \mathcal{D}(m^2)^{-5} \right)^\nu{}_\mu \right) \\
& \stackrel{\text{pôle}}{=} -\frac{i^{(-d/2)}}{48(4\pi)^{d/2}} \int dx \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{d/2-1}} \int_{M^2}^{+\infty} \frac{dm^2}{m^6} e^{-ism^2} \\
& \times \langle -4 [d_\mu, [d_\rho, \Gamma^{\rho\nu}]] [d^\mu, [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\nu}]] - 4 [d_\mu, [d_\rho, \Gamma^{\rho\nu}]] [d_\nu, [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\mu}]] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{m^4} [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}] [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\mu}] [d_\tau, \Gamma^{\tau\nu}] [d^\lambda, \Gamma_{\lambda\nu}] \\
& + \frac{2}{m^4} [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}] [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\nu}] [d_\tau, \Gamma^{\tau\mu}] [d_\lambda, \Gamma^{\lambda\nu}] \Big) \Big\rangle \\
& \stackrel{\text{pôle}}{=} - \frac{1}{12 M^4} \frac{1}{16 \pi^2} \frac{1}{d-4} \int dx \\
& \times \Big\langle - [d_\mu, [d_\rho, \Gamma^{\rho\nu}]] [d^\mu, [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\nu}]] - [d_\mu, [d_\rho, \Gamma^{\rho\nu}]] [d_\nu, [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\mu}]] \\
& + \frac{1}{4 M^4} [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}] [d_\sigma, \Gamma^{\sigma\mu}] [d_\tau, \Gamma^{\tau\nu}] [d^\lambda, \Gamma_{\lambda\nu}] \\
& + \frac{1}{8 M^4} [d^\rho, \Gamma_{\rho\mu}] [d^\sigma, \Gamma_{\sigma\nu}] [d_\tau, \Gamma^{\tau\mu}] [d_\lambda, \Gamma^{\lambda\nu}] \Big) \Big\rangle. \tag{E.61}
\end{aligned}$$

Additionnant les contributions (E.54-E.61), on vérifie que l'on retrouve le résultat présenté en (3.96).





# Annexe F

## Mooses et déconstruction dimensionnelle

Les modèles de type *moose* sont des chaînes de GBs interagissant *via* des champs de jauge. Nous décrivons ici le modèle *moose* linéaire et ouvert: la chaîne ne présente alors pas de branchements, mais possède deux extrémités libres. Nous introduisons tout d'abord les GBs à l'annexe F.1, puis les champs de jauge les couplant entre eux à l'annexe F.2. Finalement, nous présentons brièvement les idées liées à la déconstruction dimensionnelle à l'annexe F.3.

### F.1 Chaînes de modèles sigma non-linéaires

On considère un ensemble de  $K + 1$  modèles sigma non-linéaires indépendants, c'est-à-dire le lagrangien suivant

$$\mathcal{L}_{\text{sigmas}} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^K f_k^2 \langle \partial_\mu \Sigma_{k,k+1} \partial^\mu \Sigma_{k+1,k} \rangle, \quad (\text{F.1})$$

où les variables  $\Sigma_{k,k+1}$  sont des matrices  $\text{SU}(N)$ , paramétrant l'espace quotient  $\text{SU}(N) \times \text{SU}(N) / \text{SU}(N)$ . Le lagrangien (F.1) est invariant sous la transformation suivante opérant sur les champs: pour les extrémités de la chaîne, cette dernière agit selon

$$\Sigma_{k,k+1} \mapsto L_k \Sigma_{k,k+1} R_{k+1}^\dagger, \quad \text{pour } k=0, \dots, K. \quad (\text{F.2})$$

Les matrices de transformation ci-dessus appartiennent au groupe  $\text{SU}(N)$

$$L_k, R_k \in \text{SU}(N). \quad (\text{F.3})$$

Le lagrangien possède donc une symétrie

$$\prod_{k=0}^K \text{SU}(N)_{L_k} \times \text{SU}(N)_{R_{k+1}} = [\text{SU}(N) \times \text{SU}(N)]^{K+1}. \quad (\text{F.4})$$

Notre modèle décrit donc la brisure spontanée suivante

$$\prod_{k=0}^K \text{SU}(N)_{L_k} \times \text{SU}(N)_{R_{k+1}} \longrightarrow \prod_{k=0}^K \text{SU}(N)_{L_k + R_{k+1}}, \quad (\text{F.5})$$

où chaque brisure

$$\text{SU}(N)_{L_k} \times \text{SU}(N)_{R_{k+1}} \longrightarrow \text{SU}(N)_{L_k + R_{k+1}}, \quad \text{pour } k=0, \dots, K, \quad (\text{F.6})$$

peut être due à un phénomène similaire à celui qui a lieu en QCD: la brisure spontanée de symétrie chirale liée à l'explosion de la constante de couplage de jauge. On peut imaginer  $N$  saveurs de fermions de masse nulle chargés sous des théories de Yang-Mills à couplages forts, produisant des états liés non-chargés, et en particulier  $(N^2 - 1)$  GBs. En réalité, on doit construire le développement du lagrangien effectif en puissance des impulsions, comme décrit au chapitre 2, et donc compléter le premier terme  $\mathcal{O}(p^2)$  donné en (F.1) par les termes d'ordres supérieurs.

## F.2 Couplage *via* des champs de jauge

On couple à présent les  $K + 1$  multiplets de GBs introduits à l'annexe F.1 à des champs de Yang-Mills. À l'ordre de deux dérivées, le lagrangien prend la forme suivante, si l'on n'admet que des interactions locales le long de la chaîne <sup>1</sup>

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^K f_k^2 \left\langle \nabla_\mu \Sigma_{k,k+1} \nabla^\mu \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \langle G_{k\mu\nu} G_k^{\mu\nu} \rangle. \quad (\text{F.7})$$

Les dérivées covariantes sont ici définies comme suit pour  $k = 1, \dots, K - 1$

$$\nabla^\mu \Sigma_{k,k+1} = \partial^\mu \Sigma_{k,k+1} - i g_k G_k^\mu \Sigma_{k,k+1} + i g_{k+1} \Sigma_{k,k+1} G_{k+1}^\mu, \quad (\text{F.8})$$

et pour les extrémités de la chaîne

$$\nabla^\mu \Sigma_{0,1} = \partial^\mu \Sigma_{0,1} - i L_0^\mu \Sigma_{0,1} + i g_1 \Sigma_{0,1} G_1^\mu, \quad (\text{F.9})$$

$$\nabla^\mu \Sigma_{K,K+1} = \partial^\mu \Sigma_{K,K+1} - i g_K G_K^\mu \Sigma_{K,K+1} + i \Sigma_{K,K+1} R_{K+1}^\mu, \quad (\text{F.10})$$

où  $L_{0\mu}$  et  $R_{K+1\mu}$  sont des sources externes.

Les couplages brisent explicitement la symétrie  $[\text{SU}(N) \times \text{SU}(N)]^{K+1}$ , et les modèles sigma ne sont plus indépendants. La symétrie est explicitement brisée selon

$$\text{SU}(N)_{R_k} \times \text{SU}(N)_{L_k} \longrightarrow \text{SU}(N)_{G_k} \equiv \text{SU}(N)_{R_k + L_k}, \quad \text{pour } k = 1, \dots, K, \quad (\text{F.11})$$

comme remarqué dans [AHCG01b]. En effet, si l'on écrit la transformation des connexions hermitiennes  $G_k^\mu$  comme suit

$$G_k^\mu \longmapsto G_k G_k^\mu G_k^\dagger + \frac{i}{g_k} G_k \partial^\mu G_k^\dagger, \quad \text{pour } k = 1, \dots, K, \quad (\text{F.12})$$

avec les matrices de transformations

$$G_k \in \text{SU}(N). \quad (\text{F.13})$$

on voit que le lagrangien  $\mathcal{L}_2$  est invariant lorsque, simultanément aux transformations de jauge (F.12), on transforme les multiplets de bosons de Goldstone comme suit

$$\Sigma_{k,k+1} \longmapsto G_k \Sigma_{k,k+1} G_{k+1}^\dagger, \quad \text{pour } k = 1, \dots, K - 1, \quad (\text{F.14})$$

ainsi que les deux transformations particulières pour les extrémités de la chaîne

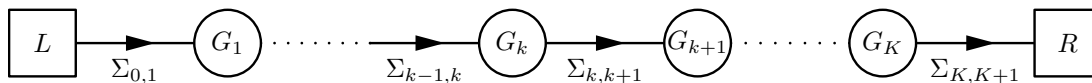
$$\Sigma_{0,1} \longmapsto L_0 \Sigma_{0,1} G_1^\dagger, \quad (\text{F.15})$$

$$\Sigma_{K,K+1} \longmapsto G_K \Sigma_{K,K+1} R_{K+1}^\dagger. \quad (\text{F.16})$$

La symétrie du lagrangien est dans ce cas

$$\text{SU}(N)_{L_0} \times \text{SU}(N)_{R_{K+1}} \times \prod_{k=1}^K \text{SU}(N)_{G_k} = \text{SU}(N)^{K+2}. \quad (\text{F.17})$$

Les propriétés de transformation sont résumées par le diagramme de type *moose* de la figure F.1.



**Figure F.1.** Représentation graphique du *moose* linéaire ouvert.

1. Le chapitre 4 montre que cette restriction du lagrangien entraîne en arbres un ensemble de règles de somme de Weinberg généralisées. Indépendamment du formalisme de spurions introduit dans ce chapitre, l'annexe I présente les effets de termes d'interactions non-locaux le long de la chaîne.

Notons que l'on pourrait introduire d'autres termes dans le lagrangien, tout en respectant les symétries décrites en (F.17): ces termes seraient des termes d'interactions entre seconds voisins. On peut par exemple écrire

$$\left\langle \nabla_\mu \Sigma_{k,k+1} \nabla^\mu \Sigma_{k+1,k+2} \Sigma_{k+1,k+2}^\dagger \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle = \mathcal{O}(p^2), \quad (\text{F.18})$$

$$\left\langle G_{k\mu\nu} \Sigma_{k,k+1} G_{k+1}^{\mu\nu} \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle = \mathcal{O}(p^2). \quad (\text{F.19})$$

Si l'on construit une LEET au sens du chapitre 2, on ne peut pas exclure ces termes, puisque le lagrangien effectif doit contenir tous les opérateurs invariants sous la symétrie. Une question valable est en revanche de savoir si l'on peut bâtir un développement dans lequel les opérateurs non-locaux le long de la chaîne apparaîtront avec des coefficients plus faibles. Ceci nécessite l'introduction d'autres paramètres de développement: les spurions du chapitre 4.

Dans l'approche originale, la suppression de ces termes est liée à l'idée de localité le long de la chaîne que constitue le *moose*. Pour mieux comprendre ce point, nous décrivons les idées principales de la déconstruction dimensionnelle.

### F.3 Déconstruction dimensionnelle

L'idée de la déconstruction dimensionnelle a été initiée dans [AHCG01a]. Le point de départ est de considérer, comme nous l'avons mentionné à l'annexe F.1, une origine possible pour chacun des multiplets de GBs: ceci représente une possible complétion à haute énergie de la théorie effective.

Pour générer chaque multiplet de GBs, le modèle le plus simple serait d'avoir un groupe de jauge  $G_k^S = \text{SU}(M_k)$  avec un couplage fort, sous lequel des fermions de Weyl se transforment. On a en réalité besoin des propriétés de transformations suivantes sous  $\text{SU}(N)_k \times \text{SU}(M_k) \times \text{SU}(N)_{k+1}$

$$\Psi_{k,k} \sim (N, \overline{M_k}, 1), \quad (\text{F.20})$$

$$\Psi_{k,k+1} \sim (1, M_k, \overline{N}). \quad (\text{F.21})$$

La figure F.2 est une représentation de ces propriétés de transformations.



**Figure F.2.** Origine dynamique possible de chaque multiplet de GBs de la figure F.1.

On se trouve donc dans la situation suivante: le modèle sous-jacent est un ensemble de  $2K + 1$  théories de Yang-Mills dont  $K + 1$  sont non-perturbatives à l'échelle à laquelle nous nous plaçons. En effet, si l'on considère la physique à une échelle inférieure à celle à laquelle les couplages des groupes  $G_k^S$  divergent, on obtient les  $K + 1$  multiplets de GBs représentés par les matrices  $\text{SU}(N)$ , et couplés aux champs de jauge faibles  $G_k^\mu$  selon (F.8-F.10).

Un aspect intéressant de tels modèles, à l'origine de la dénomination « déconstruction dimensionnelle » est le suivant. A haute énergie, on a un ensemble de théories de jauge quadri-dimensionnelles, couplées à des fermions: le modèle est donc renormalisable et éventuellement asymptotiquement libre. A basse énergie en revanche, le lagrangien  $\mathcal{L}_2$  (F.7) correspond dans la limite de grand  $K$  à une version discrétisée de l'action d'une théorie de jauge à cinq dimensions, les  $\Sigma_{k,k+1}$  étant les variables de lien dans la cinquième dimension. Dans le cas du *moose* ouvert, la cinquième dimension (correspondant à l'indice  $k$ ) est un intervalle. La correspondance, dans le cas où les constantes de couplages  $g_k$  et de désintégration  $f_k$  sont indépendantes de l'indice  $k$ <sup>2</sup>

$$f_k = f, \quad \text{pour } k = 0, \dots, K, \quad (\text{F.22})$$

$$g_k = g, \quad \text{pour } k = 1, \dots, K, \quad (\text{F.23})$$

<sup>2</sup>. Dans un cas plus général, il nous faudrait considérer un espace-temps courbe ainsi qu'un champ de fond de dilaton [SS03].

est la suivante. Le pas du réseau est donné par

$$a = \frac{1}{gf}. \quad (\text{F.24})$$

L'étendue de la cinquième dimension est

$$R = (K + 1) a. \quad (\text{F.25})$$

Le couplage de jauge à cinq dimension s'écrit

$$g_5 = g\sqrt{a}. \quad (\text{F.26})$$

Cette analogie est à l'origine de l'idée de déconstruction dimensionnelle, selon laquelle on peut deviner les résultats physiques dans un cadre (*moose* ou bien théorie de jauge à cinq dimension) à partir de notre connaissance de l'autre [Pok01, Lan02a]. La propriété de localité le long de la cinquième dimension est cruciale pour cela. Du point de vue de la théorie en cinq dimensions, cette localité est tout simplement une hypothèse de base pour la cohérence de la physique. En revanche, la théorie effective résultant des interactions non-perturbatives entre les théories à quatre dimensions devra inclure tous les opérateurs respectant les symétries. Or, la présence d'interactions entre GBs et champs de jauge signifie que la symétrie appropriée n'est pas (F.4) mais bien (F.17), permettant des interactions non-locales le long de la chaîne telles que (F.18-F.19).

La littérature fournit deux approches à cette question. La première utilise l'idée de déconstruction dimensionnelle dans le sens suivant: le modèle sous-jacent au niveau des fermions (F.20-F.21) est pris au sérieux. Alors, étant donnée le choix des interactions originales entre fermions et champs de jauge, qui sont locales le long de la cinquième dimension, on s'attend à ce que les opérateurs effectifs non-locaux le long de la chaîne (F.18-F.19) puissent être traités comme des perturbations [AHCG01a, AHCG01b]. L'autre approche consiste à considérer le *moose*, indépendamment d'une théorie sous-jacente, mais à imposer la localité le long de la chaîne au niveau du lagrangien. Le but est précisément de pouvoir interpréter la limite  $K \rightarrow \infty$  comme une théorie à cinq dimensions [SS03]. On sort alors du cadre des théories effectives pour entrer dans celui des modèles. D'autre part, les corrections en boucles vont générer ces opérateurs non-locaux le long de la chaîne, puisqu'ils sont permis par ces symétries<sup>3</sup>.

Dans les deux cas, la conclusion est que l'on doit effectivement construire la théorie effective contenant tous les opérateurs, y compris ceux qui sont non-locaux le long de la chaîne, mais que les cas physiquement intéressants semblent être ceux pour lesquels ces opérateurs sont traités en tant que corrections. Le point qui nous intéresse ici est de se passer des idées de localité dans la cinquième dimension, mais de construire un développement effectif traitant les termes non-locaux le long de la chaîne comme des perturbations. Ceci est le sujet du chapitre 4, où un formalisme de spurions est introduit. On y discute les règles de somme de Weinberg généralisées. Les corrections à ces WSRs sont également discutées dans le cadre du développement en puissances des spurions à la section 4.2.3. L'effet des termes non-locaux le long de la chaîne est également discuté à l'annexe I, indépendamment du développement spurionique, dans le simple cadre des *mooses*.

---

3. Ceci a été explicitement vérifié dans [KNP04].

# Annexe G

## Règles de somme de Weinberg

Nous présentons de brefs rappels au sujet des WSRs dans la limite chirale, permettant de faire le lien avec la discussion de la section 4.2. Deux références sont particulièrement utiles à ce sujet: [dR97, KdR98].

### G.1 Dans la limite chirale

Le cadre de cette discussion est celui de la QCD à deux saveurs de masses nulles, comme présentée à la section 2.1.1. On s'intéresse ici à la fonction à deux points (2.28) des courants de symétrie (2.6-2.7), dans le cadre de la QCD à deux saveurs de quarks nulles

$$\begin{aligned}\delta^{ab}\Pi_{\mu\nu}(q) &\equiv 4i \int dx e^{iq \cdot x} \langle 0 | T J_{L\mu}^a(x) J_{R\nu}^b(0) | 0 \rangle \\ &= i \int dx e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ J_{V\mu}^a(x) J_{V\nu}^b(0) - J_{A\mu}^a(x) J_{A\nu}^b(0) \} | 0 \rangle.\end{aligned}\quad (G.1)$$

Comme déjà mentionné, les courants apparaissant dans le  $T$ -produit sont conservés dans la limite chirale, ce qui implique que la fonction à deux points  $\Pi_{\mu\nu}$  est transverse, et ne dépend donc que d'une fonction invariante  $\Pi_{LR}$  définie par

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q_\mu q_\nu - \eta_{\mu\nu} q^2) \Pi_{LR}(-q^2). \quad (G.2)$$

Puisque la fonction à deux points (G.1) se transforme selon la représentation irréductible (3,3) de  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ , elle constitue un paramètre d'ordre de la brisure de symétrie chirale. Son évaluation en théorie des perturbations en puissances de  $g$  donnera ainsi un résultat identiquement nul à tous les ordres. D'après [SVZ79], on peut en revanche écrire le développement suivant pour  $Q^2 = -q^2 \rightarrow +\infty$  en utilisant le développement en produit d'opérateurs (*operator product expansion* ou OPE) [Wil69], qui commence par un terme d'ordre  $1/Q^6$

$$\Pi_{LR}(Q^2) = \frac{1}{Q^6} \left\{ -4\pi^2 \left( \frac{\alpha_s}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right) \langle 0 | \mathcal{O}_6 | 0 \rangle \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Q^8}\right), \quad (G.3)$$

où  $\mathcal{O}_6$  est un opérateur quartique en les champs de quarks. Ceci entraîne que la relation de dispersion satisfaite par  $\Pi_{LR}$  ne nécessite pas de soustraction

$$\Pi_{LR}(Q^2) = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s+Q^2} \text{Im} \Pi_{LR}(s). \quad (G.4)$$

On peut pousser encore plus loin l'argument en prenant la limite  $Q^2 \rightarrow +\infty$  dans (G.4), et comparant aux termes du développement (G.3): on trouve que les intégrales apparaissant en coefficient des deux premiers termes sont nulles. On retrouve ainsi les deux règles de somme initialement déduites par Weinberg [Wei67b]

$$\int_0^{+\infty} ds \text{Im} \Pi_{LR}(s) = 0, \quad (G.5)$$

$$\int_0^{+\infty} ds s \text{Im} \Pi_{LR}(s) = 0. \quad (G.6)$$

On peut de plus citer dans le cas de la QCD un résultat de positivité dû à Witten [Wit83], qui s'écrit

$$-Q^2 \Pi_{LR}(Q^2) \geq 0, \quad \text{pour } Q^2 \geq 0, \quad (\text{G.7})$$

et qui assure en particulier la positivité de la différence de masse électromagnétique entre  $\pi^\pm$  et  $\pi^0$ , donnée par l'intégrale suivante du corrélateur gauche-droit [DGM<sup>+</sup>67]

$$(m_{\pi^\pm}^2 - m_{\pi^0}^2)|_{\text{em}} = -\frac{3\alpha}{4\pi f_\pi^2} \int_0^{+\infty} dQ^2 Q^2 \Pi_{LR}(Q^2). \quad (\text{G.8})$$

## G.2 Dans la limite chirale et de grand $N_c$

Dans la limite de grand  $N_c$ , et de façon générale dans toute approximation en arbres, les résonances massives auront une largeur nulle. On pourra ainsi écrire

$$\Pi_{LR}(Q^2) = -\frac{f_0^2}{Q^2} + \sum_n \frac{F_n^2}{Q^2 + M_n^2}, \quad (\text{G.9})$$

où les constantes  $F_n^2$  auront un signe positif dans le cas d'une résonance vectorielle, et négatif pour le cas d'une résonance axiale. Dans ce cas, on vérifie aisément que les deux WSRs (G.5-G.6) se traduisent sous la forme de relations algébriques entre les couplages et les masses

$$\sum_n F_n^2 = f_0^2, \quad (\text{G.10})$$

$$\sum_n F_n^2 M_n^2 = 0, \quad (\text{G.11})$$

correspondant directement au fait que les deux premiers termes du développement de (G.9) à grand  $Q^2$  soient nuls, satisfaisant ainsi (G.3).

Dans les approximations en arbres, les LECs du lagrangien  $\mathcal{O}(p^4)$  (les constantes  $L_i$  de (2.77)) sont indépendantes d'échelles, puisqu'elles n'ont pas à absorber de divergences qui proviendraient des boucles. Dans ce cas, le développement à basse énergie de  $\Pi_{LR}$  tiré du lagrangien de la  $\chi$ PT utilisé en arbres est donné par <sup>1</sup>

$$-Q^2 \Pi_{LR}(Q^2) = f_0^2 + 4 Q^2 L_{10} + \mathcal{O}(Q^4). \quad (\text{G.12})$$

On peut également obtenir la constante  $L_{10}$  à partir de l'intégrale suivante impliquant la fonction spectrale gauche-droite à laquelle on a soustrait le pôle de masse nulle [GL84, KPdR98]

$$L_{10} = -\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} ds \left( \frac{1}{\pi} \text{Im}(\Pi_{LR}(s)) + f_0^2 \delta(s) \right). \quad (\text{G.13})$$

---

1. Voir également le résultat (2.30).

# Annexe H

## Compléments au chapitre 4

Cette annexe présente certaines étapes intermédiaires concernant les dérivations du chapitre 4, ainsi que des dérivations alternatives, plus techniques, de certains résultats, et également des exemples explicites pour illustration.

### H.1 Etapes du changement de variables

On donne ici des détails sur les manipulations à effectuer afin de reproduire les résultats de la section 4.1.3. Ces détails ont été omis dans le corps du texte, afin de ne pas encombrer le manuscrit. Cette section permet de voir explicitement le fonctionnement des changements de variables.

Pour faciliter la lisibilité, on procède par étapes: au lieu de définir directement les champs  $W_{k\mu}$ , on définit d'abord les champs  $w_{k\mu}$  pour  $k = 1, \dots, K$ , selon

$$g_k w_k^\mu \equiv i \left( \Sigma_{0,1} U_1 \prod_{j=1}^{k-1} V_j \Sigma_{j,j+1} U_{j+1} \right) D^\mu \left( \left( \prod_{j=1}^{k-1} U_{j+1}^\dagger \Sigma_{j,j+1}^\dagger V_j^\dagger \right) U_1^\dagger \Sigma_{0,1}^\dagger \right). \quad (\text{H.1})$$

Ces champs se transforment selon

$$w_k^\mu \mapsto L_0 w_k^\mu L_0^\dagger. \quad (\text{H.2})$$

Travaillant dans la jauge standard, ceci implique, pour  $k = 1, \dots, K$

$$\begin{aligned} g_k w_k^\mu &= i \left( \prod_{j=0}^{k-1} \Sigma_{j,j+1} \right) \nabla^\mu \left( \prod_{j=0}^{k-1} \Sigma_{j,j+1} \right)^\dagger \\ &= i \left( \prod_{j=0}^{k-1} \Sigma_{j,j+1} \right) \partial^\mu \left( \prod_{j=0}^{k-1} \Sigma_{j,j+1} \right)^\dagger + g_k \left( \prod_{j=0}^{k-1} \Sigma_{j,j+1} \right) G_k^\mu \left( \prod_{j=0}^{k-1} \Sigma_{j,j+1} \right)^\dagger \\ &\quad - L_0^\mu. \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

En utilisant ces réécritures, on obtient, pour  $k = 1, \dots, K-1$

$$\frac{f_k^2}{4} \left\langle D_\mu \Sigma_{k,k+1} D^\mu \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle = \frac{f_k^2}{4} \left\langle (g_{k+1} w_{k+1\mu} - g_k w_k^\mu) (g_{k+1} w_{k+1}^\mu - g_k w_k^\mu) \right\rangle, \quad (\text{H.4})$$

et pour les extrémités de la chaîne

$$\frac{f_0^2}{4} \left\langle D_\mu \Sigma_{0,1} D^\mu \Sigma_{0,1}^\dagger \right\rangle = \frac{g_1^2 f_0^2}{4} \langle w_{1\mu} w^{1\mu} \rangle, \quad (\text{H.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{f_K^2}{4} \left\langle D_\mu \Sigma_{K,K+1} D^\mu \Sigma_{K,K+1}^\dagger \right\rangle &= \frac{f_K^2}{4} \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U \rangle + \frac{f_K^2}{4} g_K^2 \langle w_{K\mu} w_K^\mu \rangle \\ &\quad - \frac{i}{2} g_K f_K^2 \langle w_K^\mu U D_\mu U^\dagger \rangle. \end{aligned} \quad (\text{H.6})$$



Notons que l'on a

$$D_\mu U = \partial_\mu U - i L_{0\mu} U + i U R_{K+1\mu}. \quad (\text{H.7})$$

D'après les redéfinitions (H.3), on a également

$$-\frac{1}{2} \langle G_{k\mu\nu} G_k^{\mu\nu} \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \left( w_{k\mu\nu} + \frac{L_{0\mu\nu}}{g_k} \right) \left( w_k^{\mu\nu} + \frac{L_0^{\mu\nu}}{g_k} \right) \right\rangle, \quad \text{pour } k=1, \dots, K-1. \quad (\text{H.8})$$

Dans cette expression,  $w_k^{\mu\nu}$  est défini par

$$w_k^{\mu\nu} \equiv D^\mu w_k^\nu - D^\nu w_k^\mu - i g_k [w_k^\mu, w_k^\nu], \quad (\text{H.9})$$

où les dérivées covariantes sont

$$D^\mu w_k^\nu \equiv \partial^\mu w_k^\nu - i [L_0^\mu, w_k^\nu], \quad (\text{H.10})$$

ainsi que

$$L_{0\mu\nu} = \partial_\mu L_{0\nu} - \partial_\nu L_{0\mu} - i [L_{0\mu}, L_{0\nu}]. \quad (\text{H.11})$$

Le lagrangien (4.44) s'écrit en terme des nouvelles variables

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2,0)} = & -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \left\langle \left( w_{k\mu\nu} + \frac{L_{0\mu\nu}}{g_k} \right) \left( w_k^{\mu\nu} + \frac{L_0^{\mu\nu}}{g_k} \right) \right\rangle + \sum_{k,k'=1}^K [\mathcal{M}^2]_{k,k'} \langle w_{k\mu} w_{k'}^\mu \rangle \\ & + \frac{f_K^2}{4} \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U \rangle - \frac{i}{2} g_K f_K^2 \langle w_K^\mu U D_\mu U^\dagger \rangle, \end{aligned} \quad (\text{H.12})$$

avec la matrice de masse carrée

$$[\mathcal{M}^2]_{k,k'} = \frac{1}{4} (\delta_{k,k'} g_k^2 (f_{k-1}^2 + f_k^2) - (\delta_{k,k'+1} + \delta_{k+1,k'}) g_k g_{k+1} f_k^2). \quad (\text{H.13})$$

Il reste encore à éliminer le terme de mélange entre le champ  $w_K^\mu$  et le champ  $U$  apparaissant dans le dernier terme de (H.6). On définit à cet effet les champs  $W_k^\mu$  selon (4.52), qui s'écrit également

$$W_k^\mu \equiv w_k^\mu - i \frac{\alpha_k}{g_k} U D^\mu U^\dagger, \quad \text{pour } k=1, \dots, K-1. \quad (\text{H.14})$$

Dans l'équation (H.14), les  $\alpha_k$  sont des constantes à déterminer pour résoudre le système d'équations suivant, correspondant à l'élimination de termes de mélange entre les champs vectoriels et le champ  $U$  dans (H.12)

$$f_k^2 (\alpha_{k+1} - \alpha_k) - f_{k-1}^2 (\alpha_k - \alpha_{k-1}) = 0, \quad \text{pour } k=1, \dots, K-1, \quad (\text{H.15})$$

où il est tenu compte des extrémités de la chaîne en posant

$$\alpha_0 = 0, \quad (\text{H.16})$$

$$\alpha_{K+1} = 1. \quad (\text{H.17})$$

Notons que la résolution explicite du système (H.15) donne bien le résultat annoncé en (4.53) (et sa généralisation aux cas  $k=0$  et  $k=K+1$  moyennant (H.16-H.17)). Le coefficient du terme cinétique des champs de Goldstone  $U$  s'exprime, par application répétée de la relation (H.15), et en utilisant (H.16) et (H.17), sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{k=0}^K f_k^2 (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2 &= \frac{1}{4} f_K^2 (1 - \alpha_K) \\ &= \frac{1}{4} f_0^2 \alpha_1 \\ &= \frac{f_\pi^2}{4}, \end{aligned} \quad (\text{H.18})$$

où la dernière égalité provient de la résolution explicite de (H.15). Après ces réécritures, les termes de degré deux ou moins en champs vectoriels et en sources dans le lagrangien sont donnés par

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(2,0)} = & \frac{f_\pi^2}{4} \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U \rangle - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \langle (\partial_\mu W_{k\nu} - \partial_\nu W_{k\mu}) (\partial^\mu W^{k\nu} - \partial^\nu W^{k\mu}) \rangle \\
& + \sum_{k,k'=1}^K [\mathcal{M}^2]_{k,k'} \langle W_{k\mu} W_{k'}^\mu \rangle \\
& - \sum_{k=1}^K \frac{1-\alpha_k}{g_k} \langle (\partial_\mu L_{0\nu} - \partial_\nu L_{0\mu}) (\partial^\mu W^{k\nu} - \partial^\nu W^{k\mu}) \rangle \\
& - \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{g_k} \langle (\partial_\mu R_{K+1\nu} - \partial_\nu R_{K+1\mu}) U^\dagger (\partial^\mu W^{k\nu} - \partial^\nu W^{k\mu}) U \rangle \\
& - \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^K \left( \frac{1-\alpha_k}{g_k} \right)^2 \right) \langle (\partial_\mu L_{0\nu} - \partial_\nu L_{0\mu}) (\partial^\mu L_0^\nu - \partial^\nu L_0^\mu) \rangle \\
& - \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^K \left( \frac{\alpha_k}{g_k} \right)^2 \right) \langle (\partial_\mu R_{K+1\nu} - \partial_\nu R_{K+1\mu}) (\partial^\mu R_{K+1}^\nu - \partial^\nu R_{K+1}^\mu) \rangle \\
& - \left( \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k (1-\alpha_k)}{g_k^2} \right) \langle (\partial_\mu L_{0\nu} - \partial_\nu L_{0\mu}) U (\partial^\mu R_{K+1}^\nu - \partial^\nu R_{K+1}^\mu) U^\dagger \rangle \\
& + \text{termes cubiques ou plus en champs vectoriels et sources}, \tag{H.19}
\end{aligned}$$

où la matrice de masse  $\mathcal{M}^2$  est à nouveau celle donnée en (H.13). Cette expression nous servira pour obtenir les WSRs par une méthode alternative à l'annexe H.3.

## H.2 Dérivation alternative de la première WSR

Dans le cadre de la section 4.2.1.1, on peut vérifier explicitement par un calcul direct la relation (4.77), qui implique la première règle de Weinberg: on démontre tout d'abord par récurrence sur  $K$ , à l'aide de la relation

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{M}_{K \times K}^2) &= \frac{g_K^2 (f_{K-1}^2 + f_K^2)}{4} \det(\mathcal{M}_{(K-1) \times (K-1)}^2) \\
&\quad - \frac{g_{K-1}^2 g_K^2 f_{K-1}^4}{16} \det(\mathcal{M}_{(K-2) \times (K-2)}^2), \tag{H.20}
\end{aligned}$$

que le déterminant de la matrice de masse vaut

$$\det(\mathcal{M}_{K \times K}^2) = 4 \left( \prod_{i=1}^K g_i^2 \right) \frac{\left( \prod_{j=0}^K \frac{f_j^2}{4} \right)}{f_\pi^2}. \tag{H.21}$$

On vérifie ensuite, utilisant la relation entre la comatrice et l'inverse de la matrice, que

$$\begin{aligned}
\frac{g_1 g_K f_0^2 f_K^2}{4} \left[ (\mathcal{M}^2)^{-1} \right]_{1,K} &= 4 \frac{\left( \prod_{i=1}^K g_i^2 \right) \left( \prod_{j=0}^K \frac{f_j^2}{4} \right)}{\det(\mathcal{M}_{K \times K}^2)} \\
&= f_\pi^2, \tag{H.22}
\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat recherché. Notons que (H.21) fournit une relation entre paramètres physiques (masses), et paramètres originaux du lagrangien, puisque l'on a par ailleurs

$$\det(\mathcal{M}_{K \times K}^2) = \prod_{n=1}^K M_n^2. \tag{H.23}$$

### H.3 Dérivation alternative des WSRs généralisées

Nous exposons une dérivation des WSRs généralisées qui est différente de celle de la section 4.2.1.1. On s'intéresse ici à écrire les relations en termes des constantes de couplages et des masses des résonances. On travaille donc dans la base physique dans laquelle la matrice de masse est diagonale. Cette dérivation a cependant le désavantage d'être purement algébrique.

La façon de procéder suit celle utilisée par les auteurs de [SS03] pour obtenir les deux WSRs. On sait qu'il est possible de diagonaliser la matrice de masse à l'aide d'une transformation orthogonale, c'est-à-dire que l'on peut définir des coefficients  $b_n^k$  tels que

$$\begin{aligned} \sum_{k,k'=0}^K [\mathcal{M}^2]_{k,k'} b_m^k b_n^{k'} &= \sum_{k=0}^K \frac{f_k^2}{4} \left( g_{k+1} b_m^{k+1} - g_k b_m^k \right) \left( g_{k+1} b_n^{k+1} - g_k b_n^k \right) \\ &= M_n^2 \delta_{mn}, \end{aligned} \quad (\text{H.24})$$

où l'on tient compte des extrémités de la chaîne en posant

$$g_0 = 0, \quad (\text{H.25})$$

$$g_{K+1} = 0. \quad (\text{H.26})$$

Dans le cas général, avec des constantes  $f_k$  et  $g_k$  quelconques, et un nombre de sites  $K$  suffisamment grand, on ne pourra cependant pas exhiber explicitement la matrice de passage  $b$ . On peut en revanche obtenir des relations générales sans effectuer explicitement cette diagonalisation. On utilise pour cela les relations d'orthogonalité pour la matrice de changement de base, qui s'écrivent

$$\sum_{k=1}^K b_m^k b_n^k = \delta_{mn}, \quad (\text{H.27})$$

$$\sum_{n=1}^K b_n^k b_n^{k'} = \delta^{kk'}. \quad (\text{H.28})$$

Le changement de base prend la forme

$$W_k^\mu = \sum_{n=1}^K b_n^k A_n^\mu, \quad (\text{H.29})$$

$$A_n^\mu = \sum_{k=1}^K b_n^k W_k^\mu, \quad (\text{H.30})$$

où la matrice de masse est diagonale en termes des nouveaux champs  $A_n^\mu$ . En procédant à la manière des auteurs de [SS03], à partir de l'équation (H.24) et en utilisant (H.27), on tire la relation suivante, qui est linéaire en les coefficients de la matrice de passage pour  $n$  et  $k$  égaux à  $1, \dots, K$

$$M_n^2 b_n^k = \frac{1}{4} g_k \left( f_k^2 \left( g_k b_n^k - g_{k+1} b_n^{k+1} \right) - f_{k-1}^2 \left( g_{k-1} b_n^{k-1} - g_k b_n^k \right) \right), \quad (\text{H.31})$$

avec les règles (H.25) et (H.26). Cette dernière relation (H.31) nous sera très utile par la suite pour obtenir des règles de somme sans avoir à diagonaliser explicitement la matrice de masse. On peut également en déduire les relations suivantes en appliquant de façon répétée les relations (H.15), sans même avoir à résoudre le système constitué par ces équations

$$\sum_{k=1}^K M_n^2 b_n^k \frac{\alpha_k}{g_k} = \frac{1}{4} g_K f_K^2 b_n^K, \quad (\text{H.32})$$

$$\sum_{k=1}^K M_n^2 b_n^k \frac{1 - \alpha_k}{g_k} = \frac{1}{4} g_1 f_1^2 b_n^1. \quad (\text{H.33})$$

Pour la suite, on supposera que les masses ont été ordonnées par ordre croissant

$$M_n^2 \leq M_{n+1}^2, \quad \text{pour } n = 1, \dots, K-1. \quad (\text{H.34})$$

La suite utilise explicitement l'expression des propagateurs, qui sont diagonaux dans cette base  $A_n^\mu$ . On injecte tout d'abord le changement de base (H.29) dans l'expression des termes quadratiques du lagrangien (H.19). On vérifie que les termes polynomiaux des deux contributions s'annulent du fait de la relation (H.28), et l'on obtient

$$\Pi_{LR}(Q^2) = -\frac{f_\pi^2}{Q^2} + \sum_{n=1}^K \frac{F_n^2}{Q^2 + M_n^2}, \quad (\text{H.35})$$

où, d'après (H.19), les  $F_n^2$  sont donnés par

$$F_n^2 = 4 \sum_{k,k'=1}^K M_n^2 b_n^k b_n^{k'} \frac{\alpha_k}{g_k} \frac{1 - \alpha_{k'}}{g_{k'}}. \quad (\text{H.36})$$

Notons que la constante de couplage  $F_n^2$  peut être positive ou négative du fait de la présence des coefficients  $b_n^k$ . Le champ de spin 1 massif dénoté par  $n$  sera appelé respectivement *résonance vectorielle* ou bien *axiale*, même si cela constitue un abus de langage: on ne s'est pas restreint au cas où la parité est imposée en tant que symétrie des couplages par rapport au centre de la chaîne. On peut obtenir une formule alternative pour les  $F_n^2$  en appliquant les relations (H.32) et (H.33) à l'expression (H.36). On trouve dans ce cas

$$F_n^2 = \frac{1}{4} g_1 g_K f_0^2 f_K^2 \frac{b_n^1 b_n^K}{M_n^2}. \quad (\text{H.37})$$

Le développement à grand  $Q^2$  de  $\Pi_{LR}$  s'écrit

$$\Pi_{LR}(Q^2) = -\frac{f_\pi^2}{Q^2} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{\sum_{n=1}^K F_n^2 M_n^{2(l-1)}}{Q^{2l}}. \quad (\text{H.38})$$

Considérons le premier terme dans le développement (H.38). On trouve, pour le cas  $K \geq 1$ , en utilisant (H.36), (H.33) et (H.28)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^K F_n^2 &= f_0^2 \alpha_1 \\ &= f_\pi^2. \end{aligned} \quad (\text{H.39})$$

La première règle de somme de Weinberg [Wei67b] est donc satisfaite. A partir du terme d'ordre suivant, on peut adopter une écriture générique. On considère, pour  $2 \leq l \leq K$ , la somme suivante

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^K F_n^2 M_n^{2(l-1)} &= \frac{1}{4} g_1 g_K f_0^2 f_K^2 \sum_{n=1}^K M_n^{2(l-2)} b_n^1 b_n^K, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{H.40})$$

La deuxième égalité est obtenue par application répétée de (H.31), gardant en mémoire (H.28). Ceci montre que l'on a en tout  $K$  WSRs généralisées.

## H.4 Dérivation des LECs en arbres

On pourrait appliquer la même méthode utilisée à la section 4.2.2 aux fonctions à trois et quatre points pour extraire les constantes  $L_1, L_2, L_3, L_9, L_{10}$  et  $H_1$  dans ce modèle. Nous utilisons plutôt les équations de mouvement, comme fait originellement dans [EGPdR89], ce qui permet d'obtenir la forme covariante du lagrangien, au lieu de reconstruire celui-ci à partir des fonctions de Green qu'il est censé permettre de déduire. En réalité, les équation de mouvement s'expriment de façon plus simple en termes des champs  $w_k^\mu$  définis en (H.1). Le lagrangien en termes de ces champs a été donné en (H.12): on en déduit les équations de mouvement pour les champs  $w_k^\mu$

$$d_{k\mu} w_k^{\mu\nu} + \left( \sum_{k'=1}^K [\mathcal{M}^2]_{k,k'} w_{k'}^\nu \right) - \frac{i}{4} \delta_{kK} g_K f_K^2 U D^\nu U^\dagger + \frac{1}{g_k} d_{k\mu} L_0^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{H.41})$$

où l'opérateur  $d_{k\mu}$  agit sur les objets dans la représentation adjointe de  $SU(2)_{L_0}$  selon

$$\begin{aligned} d_{k\mu}X &\equiv D_\mu X - i g_k [w_{k\mu}, X] \\ &= \partial_\mu X - i [L_{0\mu}, X] - i g_k [w_{k\mu}, X]. \end{aligned} \quad (\text{H.42})$$

Les équations de mouvement seront utilisées dans l'approximation que les masses sont grandes devant les impulsions en jeu. En particulier, si on s'intéresse aux seuls termes qui donnent une contribution à la fonction à deux points, (coefficients  $L_0, H_1, H'_1, L_{10}$  dans (H.44)), on peut utiliser l'équation de mouvement sous la forme simplifiée

$$w_k^\mu = \frac{i}{4} g_K f_K^2 \left[ (\mathcal{M}^2)^{-1} \right]_{k,K} U D^\nu U^\dagger + \dots \quad (\text{H.43})$$

On identifiera ensuite les termes obtenus avec ceux du lagrangien de Gasser-Leutwyler, à la différence près que l'on n'impose pas nécessairement la parité dans notre cas (symétrie des couplages par rapport au milieu de la chaîne)<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{L_0}{4} \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U \rangle + H_1 \langle L_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \rangle + H'_1 \langle R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \rangle + L_{10} \langle L_{\mu\nu} U R^{\mu\nu} U^\dagger \rangle \\ & - i L_9 \langle L_{\mu\nu} D^\mu U D^\nu U^\dagger \rangle - i L'_9 \langle R_{\mu\nu} D^\mu U^\dagger D^\nu U \rangle \\ & + L_1 \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U \rangle^2 + L_2 \langle D_\mu U^\dagger D_\nu U \rangle \langle D^\mu U^\dagger D^\nu U \rangle + L_3 \langle D_\mu U^\dagger D^\mu U D_\nu U^\dagger D^\nu U \rangle. \end{aligned} \quad (\text{H.44})$$

Grâce à la relation suivante, que l'on obtient *via* la comatrice

$$\left[ (\mathcal{M}^2)^{-1} \right]_{k,K} = \frac{4}{g_K f_K^2} \frac{\alpha_k}{g_k}, \quad (\text{H.45})$$

on trouve, après injection de (H.43) dans le lagrangien (H.12)

$$\begin{aligned} L_0 &= f_K^2 - \frac{1}{4} g_K^2 f_K^4 \left[ (\mathcal{M}^2)^{-1} \right]_{K,K} \\ &= f_\pi^2, \end{aligned} \quad (\text{H.46})$$

en utilisant les valeurs des  $\alpha_k$  données en (4.53). On a donc retrouvé par cette méthode le fait que le coefficient du terme cinétique pour les bosons de Goldstone restant dans le spectre était donné par la constante  $f_\pi^2$  définie en (4.54).

On détermine également  $L_{10}$ , sans aucune référence aux constantes de couplages des champs vectoriels massifs. On obtient à nouveau la formule (4.88)

$$\begin{aligned} L_{10} &= -\frac{g_K f_K^2}{4} \sum_{k=1}^K \left[ (\mathcal{M}^2)^{-1} \right]_{k,K} \left( \frac{1}{g_k} - \frac{g_K f_K^2}{4} \left[ (\mathcal{M}^2)^{-1} \right]_{k,K} \right) \\ &= -\sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k (1 - \alpha_k)}{g_k^2}. \end{aligned} \quad (\text{H.47})$$

De la même manière, et en utilisant à nouveau (H.45), on obtient

$$H_1 = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \frac{(1 - \alpha_k)^2}{g_k^2}, \quad (\text{H.48})$$

$$H'_1 = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k^2}{g_k^2}. \quad (\text{H.49})$$

Dans le cas où l'on impose la parité, c'est-à-dire si l'on considère le cas où les relations

$$g_k = g_{K-k+1}, \quad \text{pour } k = 1, \dots, K, \quad (\text{H.50})$$

$$f_k = f_{K-k}, \quad \text{pour } k = 0, \dots, K, \quad (\text{H.51})$$

1. Nous allons ici re-dériver la relation  $L_0 = f_\pi^2$  par cette méthode.

sont valides, entraînant

$$\alpha_k = 1 - \alpha_{K-k+1}, \quad \text{pour } k=0, \dots, K+1, \quad (\text{H.52})$$

on remarque que l'on a bien le résultat attendu

$$H_1 = H'_1. \quad (\text{H.53})$$

Notons que l'on peut retrouver ces LECs en lisant directement les coefficients des termes apparaissant dans l'expression (H.19). Ceci fonctionne pour les termes contribuant aux fonctions à deux points. Au-delà, on devra adopter une méthode plus systématique comme celle présentée ci-dessus.

## H.5 Applications

Nous présentons dans cette section certains résultats que l'on peut obtenir dans le cadre de la théorie effective de la section 4.1.2 à l'ordre  $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0)$ , c'est-à-dire avec le lagrangien (4.44).

### H.5.1 Expression des couplages en fonction des masses

Nous utilisons notre connaissance des règles de somme de Weinberg généralisées pour obtenir l'expression des constantes  $F_n^2$  en fonction des masses  $M_n^2$ . D'après (H.39) et (H.40), les  $K$  WSRs généralisées s'expriment, en termes des constantes  $F_n^2$  et des masses  $M_n^2$  comme suit

$$\sum_{n=1}^K F_n^2 M_n^{2(l-1)} = \delta_{l1} \mu^{2(l-1)} f_\pi^2, \quad \text{pour } l=1, \dots, K. \quad (\text{H.54})$$

Ceci constitue un système de  $K$  équations, que l'on cherche à résoudre pour exprimer les  $F_n^2$  en fonction des  $M_n^2$ . Une étude de tels systèmes a déjà été donnée par Knecht et de Rafael [KdR98]. Ici, le système est particulièrement simple, et on peut en donner la solution explicite sous la forme

$$F_n^2 = f_\pi^2 \frac{\prod_{j=1, j \neq n}^K M_j^2}{\prod_{j=1, j \neq n}^K (M_j^2 - M_n^2)}, \quad \text{pour } n=1, \dots, K. \quad (\text{H.55})$$

Pour vérifier que (H.55) est bien la solution du système (H.54), on peut procéder comme suit: on injecte la solution dans les termes de gauche de (H.54), et on considère l'expression obtenue comme une fonction méromorphe en la variable  $z \equiv M_K^2$ , c'est-à-dire que l'on étudie la fonction

$$\begin{aligned} f_l(z) = & \left( \prod_{j=1}^{K-1} M_j^2 \right) \frac{z^{l-1}}{\prod_{j=1}^{K-1} (M_j^2 - z)} \\ & + \left( \sum_{n=1}^{K-1} \left( \frac{\prod_{j=1, j \neq n}^{K-1} M_j^2}{\prod_{j=1, j \neq n}^{K-1} (M_j^2 - M_n^2)} \right) M_n^{2(l-1)} \frac{z}{z - M_n^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{H.56})$$

On peut alors montrer pour  $l=1, \dots, K-1$ , que la partie singulière du pôle en  $z = M_i^2$  est nulle. De plus, on peut montrer par récurrence sur  $K$  que la fonction  $f_l(z)$  tend vers une constante lorsque  $z$  tend vers l'infini. Cette constante vaut  $\delta_{l1}$ . La fonction méromorphe ne possédant pas de pôle, elle est constante, et la valeur trouvée est bien celle recherchée. L'expression (H.55) est donc bien la solution du système (H.54).

On remarque, d'après l'expression des constantes  $F_n^2$ , que l'on a toujours un spectre alterné: si les masses sont ordonnées comme prescrit par (H.34), on a

$$(-1)^{n-1} F_n^2 > 0 \quad \text{pour } n=1, \dots, K. \quad (\text{H.57})$$

Une remarque similaire a déjà été faite par Knecht et de Rafael [KdR98].

Considérant l'expression de  $L_{10}$  en fonction des  $F_n^2$  (4.87), et utilisant le résultat (H.55), où l'on considère une des masses comme un variable complexe, on peut montrer que la fonction méromorphe donnant  $L_{10}$  ne possède qu'un pôle simple à l'origine, et déterminer le résidu. Finalement, on trouve l'expression suivante pour  $L_{10}$ , en termes des masses, pour  $K \geq 2$

$$L_{10} = -\frac{f_\pi^2}{4} \sum_{n=1}^K \frac{1}{M_n^2}. \quad (\text{H.58})$$

On a ainsi exprimé à la fois les constantes  $F_n^2$  et  $L_{10}$  en fonction uniquement des masses des résonances et de la constante de désintégration des GBs  $f_\pi$ . Notons par ailleurs que ceci confirme bien le signe de  $L_{10}$  obtenu en (4.88), et nous donne une deuxième relation entre masses et paramètres du lagrangien

$$\sum_{n=1}^K \frac{1}{M_n^2} = \frac{4}{f_\pi^2} \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k (1 - \alpha_k)}{g_k^2}. \quad (\text{H.59})$$

### H.5.2 Expression du corrélateur gauche-droit

Mettant l'expression pour  $\Pi_{LR}$  sous la forme

$$\Pi_{LR}(Q^2) = \frac{N(Q^2)}{Q^2 \prod_{n=1}^K (Q^2 + M_n^2)}, \quad (\text{H.60})$$

on étudie le numérateur  $N(Q^2)$  qui est un polynôme de degré  $K$  en  $Q^2$

$$\begin{aligned} N(Q^2) + f_\pi^2 \prod_{j=1}^K M_j^2 &= -f_\pi^2 \prod_{j=1}^K (Q^2 + M_j^2) + Q^2 \sum_{n=1}^K \left( F_n^2 \prod_{j=1, j \neq n}^K (Q^2 + M_j^2) \right) \\ &+ f_\pi^2 \prod_{j=1}^K M_j^2. \end{aligned} \quad (\text{H.61})$$

On trouve, utilisant la solution explicite des  $K$  WSRs généralisées (H.55), que ce polynôme possède  $K+1$  zéros en  $Q^2 = -M_K^2, \dots, -M_1^2, 0$  et est donc identiquement nul. On peut donc écrire

$$\Pi_{LR}(Q^2) = -\frac{f_\pi^2 \prod_{j=1}^K M_j^2}{Q^2 \prod_{n=1}^K (Q^2 + M_n^2)}, \quad (\text{H.62})$$

et on vérifie alors que l'inégalité de Witten [Wit83] est vérifiée

$$\forall Q^2 \geq 0, \quad -Q^2 \Pi_{LR}(Q^2) \geq 0. \quad (\text{H.63})$$

### H.5.3 Masse électrofaible des PGBs

On imagine maintenant que les GBs restant dans le spectre, et décrits par la matrice  $U \in \text{SU}(2)$ , sont couplés au secteur électrofaible, avec des couplages identiques à ceux des pions dans le SM, c'est-à-dire que l'on considère notre modèle *moose* comme une description de la QCD à basse énergie, incluant les pions et des résonances. Nous avons vu qu'en QCD dans la limite chirale, seules les deux WSRs sont valides (annexe G.1): la théorie effective avec  $K$  sites ne s'applique donc pas directement à la QCD. L'intérêt est ici de voir les conséquences physiques des WSRs sur les corrections radiatives aux masses des PGBs. L'idée sous-jacente est que ceci fournit une autre interprétation, en termes des WSRs, au phénomène de protection des masses des *chain scalars* présenté dans [AHCG01b]. L'argument original était que les PGBs sont des objets non-locaux dans la cinquième dimension, et que le terme de masse correspondant est également non-local, et n'obtient donc de divergences qu'à partir d'un nombre de boucles donné si l'on part d'un lagrangien local suivant la cinquième dimension. Ici, on comprend le phénomène ainsi: la localité des interactions implique les WSRs. Celles-ci entraînent à leur tour une absence de divergences à une boucle, due au comportement plus doux à haute énergie.

En effet, à une boucle, la masse électromagnétique des pions sera donnée par l'intégrale suivante [DGM<sup>+</sup>67, Pes80, EGPdR89, Mou97], où  $A_\mu$  est le champ du photon

$$\begin{aligned}
(m_{\pi^\pm}^2 - m_{\pi^0}^2)|_{\text{em}} &= 4i \frac{e^2}{f_\pi^2} \int d^D x \langle 0 | T J_L^{3\mu}(x) A_\mu^0(x) J_R^{3\nu}(0) A_\nu^0(0) | 0 \rangle \\
&= - \frac{e^2}{f_\pi^2} \int d^D x \langle 0 | T A_\mu^0(x) A_\nu^0(0) | 0 \rangle \\
&\times \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{-iq \cdot x} (\eta^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi_{LR}(-q^2) \\
&= - \frac{3\alpha}{4\pi f_\pi^2} \int_0^{+\infty} dQ^2 Q^2 \Pi_{LR}(Q^2), \tag{H.64}
\end{aligned}$$

indépendamment de la jauge utilisée pour le propagateur du photon. L'intégrale (H.64) est positive d'après (H.63), et converge si les deux règles de Weinberg sont vérifiées, ce qui est le cas dans notre cadre pour  $K \geq 2$ . Alors, on pourra écrire, utilisant (H.35) et (H.55)

$$\begin{aligned}
(m_{\pi^\pm}^2 - m_{\pi^0}^2)|_{\text{em}} &= - \frac{3\alpha}{4\pi f_\pi^2} \left( \sum_{n=1}^K F_n^2 M_n^2 \ln \left( \frac{M_n^2}{\mu^2} \right) \right) \\
&= - \frac{3\alpha}{4\pi f_\pi^2} \left( \prod_{j=1}^K M_j^2 \right) \left( \sum_{n=1}^K \frac{\ln \left( \frac{M_n^2}{\mu^2} \right)}{\left( \prod_{j=1, j \neq n}^K (M_j^2 - M_n^2) \right)} \right), \tag{H.65}
\end{aligned}$$

où l'indépendance en fonction de  $\mu$  est garantie par la seconde règle de Weinberg: le coefficient de  $\ln \mu^2$  est nul.

Si l'on considère les corrections dues à l'échange de  $Z^0$  dans le SM (l'échange de  $W^\pm$  ne contribue pas car ces bosons ne sont couplés qu'au courant gauche), on obtient par le jeu de coefficients qui interviennent dans le couplage du  $Z^0$  aux PGBs, l'expression [KPdR98]

$$(m_{\pi^\pm}^2 - m_{\pi^0}^2)|_{\text{ew}} = - \frac{3\alpha}{4\pi f_\pi^2} \int dQ^2 \frac{Q^2 M_Z^2}{Q^2 + M_Z^2} \Pi_{LR}(Q^2). \tag{H.66}$$

La première règle de Weinberg seule suffit à assurer la convergence de cette intégrale [KPdR98]. On trouve

$$\begin{aligned}
(m_{\pi^\pm}^2 - m_{\pi^0}^2)|_{\text{ew}} &= \frac{3\alpha}{4\pi f_\pi^2} M_Z^2 \left( \sum_{n=1}^K \frac{F_n^2 M_n^2}{M_Z^2 - M_n^2} \ln \left( \frac{M_n^2}{M_Z^2} \right) \right) \\
&= \frac{3\alpha}{4\pi f_\pi^2} M_Z^2 \left( \prod_{j=1}^K M_j^2 \right) \left( \sum_{n=1}^K \frac{1}{M_Z^2 - M_n^2} \frac{\ln \left( \frac{M_n^2}{M_Z^2} \right)}{\left( \prod_{j=1, j \neq n}^K (M_j^2 - M_n^2) \right)} \right). \tag{H.67}
\end{aligned}$$

## H.6 Le corrélateur gauche-droit à l'ordre $\mathcal{O}(p^2 \epsilon^0)$ dans un cas simple

Dans cette section, on s'intéresse aux conséquences du lagrangien (4.44) pour la fonction  $\Pi_{LR}$  dans le cas particulier où tous les  $f_k$  sont identiques, ainsi que tous les  $g_k$

$$f_k = f, \quad \text{pour } k = 0, \dots, K, \tag{H.68}$$

$$g_k = g, \quad \text{pour } k = 1, \dots, K, \tag{H.69}$$

c'est-à-dire que l'on considère à présent le lagrangien suivant

$$\mathcal{L}_2 = \frac{f^2}{4} \sum_{k=0}^K \left\langle \nabla_\mu \Sigma_{k,k+1} \nabla^\mu \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \langle G_{k\mu\nu} G_k^{\mu\nu} \rangle, \tag{H.70}$$



avec

$$\nabla^\mu \Sigma_{k,k+1} = \partial^\mu \Sigma_{k,k+1} - i g G_k^\mu \Sigma_{k,k+1} + i g \Sigma_{k,k+1} G_{k+1}^\mu, \quad \text{pour } k=1, \dots, K-1, \quad (\text{H.71})$$

et pour les extrémités de la chaîne

$$D^\mu \Sigma_{0,1} = \partial^\mu \Sigma_{0,1} - i L_0^\mu \Sigma_{0,1} + i g \Sigma_{0,1} G_1^\mu, \quad (\text{H.72})$$

$$D^\mu \Sigma_{K,K+1} = \partial^\mu \Sigma_{K,K+1} - i g G_K^\mu \Sigma_{K,K+1} + i \Sigma_{K,K+1} R_{K+1}^\mu. \quad (\text{H.73})$$

La matrice de masse (4.63) prend la forme suivante

$$\mathcal{M}^2 = \frac{g^2 f^2}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \ddots & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (\text{H.74})$$

et la diagonalisation procède par la transformation orthogonale (cf. (H.29))

$$b_n^k = \sqrt{\frac{2}{K+1}} \sin\left(\frac{\pi n k}{K+1}\right). \quad (\text{H.75})$$

On obtient les valeurs propres de  $\mathcal{M}^2$

$$M_n^2 = g^2 f^2 \sin^2\left(\frac{\pi n}{2(K+1)}\right), \quad \text{pour } n=1, \dots, K, \quad (\text{H.76})$$

et les expressions suivantes pour les intermédiaires de calcul

$$\alpha_k = \frac{k}{K+1}, \quad \text{pour } k=0, \dots, K+1, \quad (\text{H.77})$$

et pour la constante de désintégration des bosons de Goldstone restant dans le spectre

$$f_\pi^2 = \frac{f^2}{K+1}. \quad (\text{H.78})$$

En appliquant directement la relation (H.36), on obtient les constantes de couplages des résonances

$$\begin{aligned} F_n^2 &= \frac{8 f_\pi^2}{(K+1)^2} \sin^2\left(\frac{\pi n}{2(K+1)}\right) \sum_{p,q=1}^K ((K+1)p - pq) \sin\left(\frac{\pi n p}{2(K+1)}\right) \sin\left(\frac{\pi n q}{2(K+1)}\right) \\ &= 2(-1)^{n+1} f_\pi^2 \cos^2\left(\frac{\pi n}{2(K+1)}\right). \end{aligned} \quad (\text{H.79})$$

Notons qu'il existe un moyen plus physique et plus direct d'obtenir ce résultat, plutôt que de calculer les sommes obscures de la première ligne de l'équation précédente: cette méthode sera par ailleurs utilisée pour les calculs de l'annexe I.2. On peut exprimer les courants gauche et droit à l'ordre d'une puissance des champs, d'après les expressions (4.68) et (4.69) et grâce à l'expression explicite des  $b_n^k$  (H.75)

$$J_L^{a\mu} = + \frac{f_\pi}{2} \partial^\mu \pi^a - \frac{g f^2}{4} \sqrt{\frac{2}{K+1}} \sum_{n=1}^K \sin\left(\frac{\pi n}{K+1}\right) A_n^\mu + \dots, \quad (\text{H.80})$$

$$J_R^{a\mu} = - \frac{f_\pi}{2} \partial^\mu \pi^a - \frac{g f^2}{4} \sqrt{\frac{2}{K+1}} \sum_{n=1}^K (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi n}{K+1}\right) A_n^\mu + \dots, \quad (\text{H.81})$$

ce qui est suffisant pour écrire la fonction à deux points à l'ordre des arbres, connaissant l'expression du propagateur pour les champs  $A_n^\mu$

$$i \int dx e^{iq \cdot x} \langle 0 | T A_m^{a\mu}(x) A_n^{b\nu}(0) | 0 \rangle = \delta_{mn} \delta^{ab} \frac{\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{M_n^2}}{q^2 - M_n^2}, \quad (\text{H.82})$$

où  $M_n^2$  est donnée par (H.76). On obtient ainsi

$$\begin{aligned} i \int dx e^{iq \cdot x} \langle 0 | T J_L^{a\mu}(x) J_R^{b\nu}(0) | 0 \rangle &= \delta^{ab} \frac{g^2 f^4}{8(K+1)} \sum_{n=1}^K (-1)^{n+1} \sin^2\left(\frac{\pi n}{K+1}\right) \frac{\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{M_n^2}}{q^2 - M_n^2} \\ &+ \delta^{ab} \frac{f_\pi^2}{4} \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}, \end{aligned} \quad (\text{H.83})$$

avec (H.76). Ceci permet d'extraire plus directement le résultat

$$\begin{aligned} F_n^2 &= (-1)^{n+1} \frac{f^2}{2(K+1)} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{K+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi n}{2(K+1)}\right)} \\ &= 2(-1)^{n+1} f_\pi^2 \cos^2\left(\frac{\pi n}{2(K+1)}\right). \end{aligned} \quad (\text{H.84})$$

On peut également donner une expression explicite pour la constante  $L_{10}$  d'après (4.88), en utilisant (H.77)

$$L_{10} = -\frac{1}{6g^2} \frac{K(K+2)}{K+1}. \quad (\text{H.85})$$



# Annexe I

## Interactions non-locales le long du *moose*

Cette annexe décrit les conséquences de l'adjonction dans les *mooses* de l'annexe F des termes non-locaux le long de la chaîne les plus simples. Cette discussion étend donc celle de l'annexe 4.2.3, mais ne se place pas dans le cadre du développement spurionique. Dans ce cas, les WSRs n'obtiennent pas des corrections en puissance d'un petit paramètre, mais sont tout simplement perdues.

### I.1 Interactions entre liens voisins

Dans cette section, on considère les modifications apportées par des termes du type

$$\left\langle \nabla_\mu \Sigma_{k,k+1} \nabla^\mu \Sigma_{k+1,k+2} \Sigma_{k+1,k+2}^\dagger \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle, \quad (\text{I.1})$$

dans le lagrangien (F.7). On travaille donc avec le lagrangien suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_2 = & \frac{1}{4} \sum_{k=0}^K f_k^2 \left\langle \nabla_\mu \Sigma_{k,k+1} \nabla^\mu \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \langle G_{k\mu\nu} G_k^{\mu\nu} \rangle \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{K-1} f_{k,k+1}^2 \left\langle \nabla_\mu \Sigma_{k,k+1} \nabla^\mu \Sigma_{k+1,k+2} \Sigma_{k+1,k+2}^\dagger \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle, \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

les signes des constantes  $f_{k,k+1}^2$  pouvant être quelconques.

L'étude de ce lagrangien procède de façon analogue à l'annexe H.1: la différence étant que l'on s'est placé en dehors du cadre du développement spurionique, choisissant d'inclure uniquement un certain sous-ensemble de termes non-locaux le long de la chaîne dans le lagrangien. Ce choix est arbitraire en dehors d'une méthode d'approximation définie, mais justifiable dans le cadre de la déconstruction dimensionnelle (section F.3), puisque nous avons ajouté des interactions entre premiers voisins. On utilise ensuite des redéfinitions semblables à celles de l'annexe H.1 <sup>1</sup>, mais avec des coefficients  $\alpha_k$  adaptés au problème, c'est-à-dire, solution du système

$$\begin{aligned} \text{pour } k=1, \dots, K, \quad & f_{k-1}^2 (\alpha_k - \alpha_{k-1}) - f_k^2 (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \\ & + f_{k-1,k}^2 (2\alpha_k - \alpha_{k+1} - \alpha_{k-1}) \\ & + f_{k,k+1}^2 (\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}) - f_{k-2,k-1}^2 (\alpha_{k-1} - \alpha_{k-2}) = 0, \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

ce qui correspond à l'élimination des termes quadratiques croisés entre bosons vecteurs et GBs, généralisant (H.15). On impose ici les conditions aux bords

$$\alpha_{-1} = \alpha_0 = 0, \quad (\text{I.4})$$

$$\alpha_{K+1} = \alpha_{K+2} = 0. \quad (\text{I.5})$$

Le coefficient du terme cinétique pour les bosons de Goldstone restant dans le spectre, que l'on note  $f_\pi^2/4$  s'écrit en utilisant les définitions (I.4) et (I.5)

$$f_\pi^2 = \sum_{k=0}^K f_k^2 (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2 - 2 \sum_{k=0}^K f_{k,k+1}^2 (\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}) (\alpha_{k+1} - \alpha_k). \quad (\text{I.6})$$

1. Précisons la différence suivante: il n'y a pas ici de spurions, et les redéfinitions des champs correspondent à la version en jauge standard de celles de l'annexe H.1.

On peut montrer, par application répétée des relations (I.3), que l'on a

$$\begin{aligned} f_\pi^2 &= f_K^2 (1 - \alpha_K) - f_{K-1,K}^2 (\alpha_K - \alpha_{K-1}) \\ &= f_0^2 \alpha_1 - f_{0,1}^2 (\alpha_2 - \alpha_1), \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

à comparer avec (H.18). Une expression explicite, c'est-à-dire uniquement en termes des paramètres du lagrangien, de cette constante de désintégration nécessiterait une résolution explicite du système (I.3). En revanche, cette solution explicite n'est pas nécessaire pour établir les règles de somme du type de celles de Weinberg.

Un préalable nécessaire à l'étude de ces règles est en revanche le calcul, pour  $K \geq 2$ , des sommes suivantes, qui généralisent (H.32-H.33)

$$4 \sum_{k=1}^K M_n^2 b_n^k \frac{\alpha_k}{g_k} = g_K (f_K^2 + f_{K-1,K}^2) b_n^K - g_{K-1} f_{K-1,K}^2 b_n^{K-1}, \quad (\text{I.8})$$

$$4 \sum_{k=1}^K M_n^2 b_n^k \frac{1 - \alpha_k}{g_k} = g_1 (f_0^2 + f_{0,1}^2) b_n^1 - g_2 f_{0,1}^2 b_n^2, \quad (\text{I.9})$$

ce qui se vérifie à l'aide de la formule suivante, résultant de la diagonalisation de la matrice de masse, et qui remplace (H.31)

$$\begin{aligned} \text{pour } k=1, \dots, K, \quad 4 M_n^2 \frac{b_n^k}{g_k} &= f_{k-1}^2 (g_k b_n^k - g_{k-1} b_n^{k-1}) - f_k^2 (g_{k+1} b_n^{k+1} - g_k b_n^k) \\ &+ f_{k-1,k}^2 (2 g_k b_n^k - g_{k+1} b_n^{k+1} - g_{k-1} b_n^{k-1}) \\ &+ f_{k,k+1}^2 (g_{k+2} b_n^{k+2} - g_{k+1} b_n^{k+1}) \\ &- f_{k-2,k-1}^2 (g_{k-1} b_n^{k-1} - g_{k-2} b_n^{k-2}), \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

où l'on a introduit

$$g_{-1} = g_0 = 0, \quad (\text{I.11})$$

$$g_{K+1} = g_{K+2} = 0. \quad (\text{I.12})$$

On trouve par ailleurs que les expressions des constantes de couplages  $F_n^2$  sont ici encore données par

$$F_n^2 = 4 \sum_{k,k'=1}^K M_n^2 b_n^k b_n^{k'} \frac{\alpha_k}{g_k} \frac{1 - \alpha_k}{g_k}. \quad (\text{I.13})$$

On vérifie alors, à l'aide de (I.8) et (I.9) et de la relation d'orthogonalité des  $b_n^k$ , puis en comparant avec la relation (I.7), que la première règle de Weinberg est satisfaite

$$\sum_{n=1}^K F_n^2 = f_\pi^2. \quad (\text{I.14})$$

On peut par ailleurs montrer, par application répétée de (I.3), que l'on a en tout  $[K/2]$  règles de Weinberg: en effet, en plus de la relation (I.14), on trouve que les sommes suivantes sont toutes nulles

$$\sum_{n=1}^K F_n^2 M_n^{2l} = 0, \quad \text{pour } l=1, \dots, [K/2] - 1. \quad (\text{I.15})$$

On peut également déterminer le premier coefficient non nul dans le développement à grand  $Q^2$  de la fonction  $\Pi_{LR}$ : il est donné, si  $K$  est impair, par

$$\sum_{n=1}^K F_n^2 M_n^{2\left(\frac{K-1}{2}\right)} = 4 \left( \prod_{i=1}^{\frac{K-1}{2}} g_{2i}^2 \right) \left( \prod_{j=0}^{\frac{K-1}{2}} \frac{f_{2j,2j+1}^2}{4} \right), \quad (\text{I.16})$$

et si  $K$  est pair, par

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^K F_n^2 M_n^K &= - \sum_{m=0}^{K/2} \left( \left( \prod_{i=1}^m g_{2i}^2 \right) \left( \prod_{j=0}^{m-1} \frac{f_{2j,2j+1}^2}{4} \right) \right. \\ &\quad \times \left. (f_{2m}^2 + f_{2m-1,2m}^2 + f_{2m,2m+1}^2) \left( \prod_{k=m}^{K/2-1} g_{2k+1}^2 \right) \left( \prod_{l=m}^{K/2-1} \frac{f_{2l+1,2l+2}^2}{4} \right) \right), \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

où l'on a adopté la convention

$$f_{-1,0}^2 = 0, \quad (\text{I.18})$$

$$f_{K,K+1}^2 = 0. \quad (\text{I.19})$$

Il est à noter que dans ce cas, le signe de ce premier terme non-nul dans le développement à grand  $Q^2$  de  $\Pi_{LR}$  n'est pas *a priori* fixé, et donc, que l'inégalité de Witten (4.86) n'est pas automatiquement vérifiée.

Par ailleurs, le signe du coefficient  $L_{10}$ , donné par l'expression

$$L_{10} = - \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k(1-\alpha_k)}{g_k^2}, \quad (\text{I.20})$$

n'est pas connu non plus: pour le déterminer, il nous faudrait connaître les  $\alpha_k$  solutions du système (I.3). Cependant, si la restrictions aux proches voisins a un sens, on s'attend à avoir

$$|f_{k,k+1}^2| \ll f_j^2, \quad (\text{I.21})$$

et donc à ce que les corrections dues à ces interactions de seconds voisins soient petites, et ne modifient pas le signe de  $L_{10}$ .

Une différence importante entre la situation décrite ici et la discussion de l'annexe 4.2.3 et la suivante: ici, les termes non-locaux le long de la chaîne ont été directement ajoutés au lagrangien du *moose*, sans considérer un développement en puissance de spurions. Ainsi, un nombre quelconque de termes non-locaux le long de la chaîne peut intervenir, réduisant effectivement la longueur de la chaîne de « moitié ». Dans le cadre du développement spurionique, on trouve qu'à un ordre donné, seul un nombre restreint de termes non-locaux le long de la chaîne peut intervenir. En particulier, les termes donnant des interactions entre liens plus éloignés sont plus fortement supprimés: les spurions fournissent un cadre pour formuler le fait que les interactions non-locales sont supprimées, tandis que nous nous sommes ici arbitrairement restreints aux interactions entre premiers voisins.

## I.2 Interactions entre sites voisins

On peut également étudier l'effet d'un autre type de termes d'interactions: ceux de la forme

$$\alpha_{k,k+1} \left\langle G_{k\mu\nu} \Sigma_{k,k+1} G_{k+1}^{\mu\nu} \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle. \quad (\text{I.22})$$

Cette modification nécessite de diagonaliser les termes cinétiques des champs vecteurs puis de normaliser ces mêmes champs avant de diagonaliser la matrice de masse. Afin d'obtenir une expression analytique, on va se restreindre à un cas simple où les constantes de couplages sont indépendantes de  $k$ , qui est l'extension du cas considéré à l'annexe H.6. La distinction est de nouveau que nous ne nous plaçons pas dans le cadre du développement en puissance des spurions, mais ajoutons uniquement certaines interactions entre proches voisins, qui seront traités de manière exacte. On considère ainsi le lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \frac{f^2}{4} \sum_{k=0}^K \left\langle \nabla_\mu \Sigma_{k,k+1} \nabla^\mu \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \langle G_{k\mu\nu} G_k^{\mu\nu} \rangle \\ &\quad + \alpha \sum_{k=1}^{K-1} \left\langle G_{k\mu\nu} \Sigma_{k,k+1} G_{k+1}^{\mu\nu} \Sigma_{k,k+1}^\dagger \right\rangle, \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

c'est-à-dire qu'en plus de fixer

$$f_k = f, \quad \text{pour } k=0, \dots, K, \quad (\text{I.24})$$

$$g_k = g, \quad \text{pour } k=1, \dots, K, \quad (\text{I.25})$$

dans le lagrangien (4.44), on considère le cas particulier où les termes (I.22) sont introduits avec la même constante quel que soit  $k$

$$\alpha_{k,k+1} = \alpha, \quad \text{pour } k=1, \dots, K-1, \quad (\text{I.26})$$

On effectue la même démarche qu'à l'annexe H.1, définissant les champs en jauge unitaire  $W_k^\mu$  afin d'éliminer les termes de mélange entre ces champs vectoriels et les bosons de Goldstone restant dans le spectre. De même qu'à l'annexe H.6, on obtient les expressions de  $\alpha_k$  et  $f_\pi^2$  données en (H.77) et (H.78). On doit ensuite diagonaliser la matrice des termes cinétiques qui est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & \ddots & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \ddots & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.27})$$

Il se trouve que cette matrice est diagonalisée par la même transformation orthogonale (H.75) que la matrice de masse (donnée en (H.74)), ce qui rend possible un calcul exact. Les valeurs propres de (I.27) sont données par

$$\lambda_n = 1 - 2\alpha \cos\left(\frac{\pi n}{K+1}\right), \quad \text{pour } n=1, \dots, K, \quad (\text{I.28})$$

on obtient après normalisation des champs, les valeurs suivantes pour les masses des résonances

$$M_n^2 = g^2 f^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{2(K+1)}\right)}{1 - 2\alpha \cos\left(\frac{\pi n}{K+1}\right)}. \quad (\text{I.29})$$

L'expression des courants à l'ordre linéaire en les champs est donnée par

$$J_L^{a\mu} = + \frac{f_\pi}{2} \partial^\mu \pi^a - \frac{g f^2}{4} \sqrt{\frac{2}{K+1}} \sum_{n=1}^K \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{K+1}\right)}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos\left(\frac{\pi n}{K+1}\right)}} A_n^\mu + \dots, \quad (\text{I.30})$$

$$J_R^{a\mu} = - \frac{f_\pi}{2} \partial^\mu \pi^a - \frac{g f^2}{4} \sqrt{\frac{2}{K+1}} \sum_{n=1}^K \frac{(-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi n}{K+1}\right)}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos\left(\frac{\pi n}{K+1}\right)}} A_n^\mu + \dots, \quad (\text{I.31})$$

où les champs  $A_n^\mu$  sont tels que les termes quadratiques sont diagonaux et normalisés de façon conventionnelle, c'est-à-dire que l'on a

$$i \int dx e^{iq \cdot x} \langle 0 | T A_m^{a\mu}(x) A_n^{b\nu}(0) | 0 \rangle = \delta_{mn} \delta^{ab} \frac{\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{M_n^2}}{q^2 - M_n^2}, \quad (\text{I.32})$$

avec  $M_n^2$  donnée par (I.29). La généralisation au cas  $\alpha \neq 0$  de l'expression (H.83) du corrélateur gauche-droit est donc la suivante

$$\begin{aligned} i \int dx e^{iq \cdot x} \langle 0 | T J_L^{a\mu}(x) J_R^{b\nu}(0) | 0 \rangle &= \delta^{ab} \frac{g^2 f^4}{8(K+1)} \sum_{n=1}^K \frac{(-1)^{n+1} \sin^2\left(\frac{\pi n}{K+1}\right)}{1 - 2\alpha \cos\left(\frac{\pi n}{K+1}\right)} \frac{\eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{M_n^2}}{q^2 - M_n^2} \\ &+ \delta^{ab} \frac{f_\pi^2}{4} \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}. \end{aligned} \quad (\text{I.33})$$

De cette expression, on peut extraire une formule donnant le  $l$ -ième moment de la fonction à deux points selon

$$\begin{aligned} (-1)^{l-1} \sum_{n=1}^K F_n^2 M_n^{2(l-1)} &= 2 (-1)^l g^{2(l-1)} f_\pi^2 \\ &\times \sum_{n=1}^K (-1)^n \cos^2\left(\frac{\pi n}{2(K+1)}\right) \left( \frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{2(K+1)}\right)}{1 - 2\alpha \cos\left(\frac{\pi n}{K+1}\right)} \right)^{l-1}. \end{aligned} \quad (\text{I.34})$$

En particulier, on trouve que le paramètre  $\alpha$  n'intervient pas dans la somme correspondant à la première règle de Weinberg (le cas  $l=1$ )

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^K F_n^2 &= 2 f_\pi^2 \sum_{n=1}^K (-1)^{n+1} \cos^2\left(\frac{\pi n}{2(K+1)}\right) \\ &= f_\pi^2. \end{aligned} \quad (\text{I.35})$$

Cette règle de somme est donc vérifiée. On peut se convaincre que cela n'est pas dû à notre choix particulièrement simple pour les constantes  $g_k$ ,  $f_k$  et  $\alpha_{k,k+1}$  en étudiant explicitement le cas  $K=2$  sans ces hypothèse simplificatrices. En revanche, on peut voir que pour les cas  $2 \leq l \leq K$ , la somme est différente de 0 si  $\alpha$  est non-nul. Hormis la première, toutes les règles de Weinberg additionnelles sont donc perdues suite à l'introduction de ce type d'interactions entre premiers voisins.

Dans ce modèle, on peut également donner une expression pour la constante  $L_{10}$ . Les relations (I.20) et (H.58) ne sont cependant plus valables, et l'on doit calculer  $L_{10}$  à partir des  $F_n^2$  et des  $M_n^2$ . On trouve ainsi

$$\begin{aligned} L_{10} &= -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^K \frac{F_n^2}{M_n^2} \\ &= \frac{1}{2 g^2 (K+1)} \sum_{n=1}^K \frac{(-1)^n}{\tan^2\left(\frac{\pi n}{2(K+1)}\right)}. \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$





# Bibliographie

- [AB69] S. L. Adler and W. A. Bardeen, *Absence of higher-order corrections in the anomalous axial-vector divergence equation*, Phys. Rev. **182**, 1517 (1969).
- [AB80] T. Appelquist and C. W. Bernard, *Strongly interacting Higgs boson*, Phys. Rev. **D22**, 200 (1980).
- [AB91] G. Altarelli and R. Barbieri, *Vacuum polarization effects of new physics on electroweak processes*, Phys. Lett. **B253**, 161 (1991).
- [ABCH85] T. Appelquist, M. J. Bowick, E. Cohler, and A. I. Hauser, *The breaking of isospin symmetry in theories with a dynamical Higgs mechanism*, Phys. Rev. **D31**, 1676 (1985).
- [Adl69] S. L. Adler, *Axial-vector vertex in spinor electrodynamics*, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969).
- [AGG85] L. Alvarez-Gaumé and P. Ginsparg, *Geometry anomalies*, Nucl. Phys. **B262**, 439 (1985).
- [AH<sup>+</sup>02] N. Arkani-Hamed *et al.*, *The minimal moose for a little Higgs*, JHEP **0208**, 021 (2002), hep-ph/0206020.
- [AHC01a] N. Arkani-Hamed, A. G. Cohen, and H. Georgi, *(De)constructing dimensions*, Phys. Rev. Lett. **86**, 4757 (2001), hep-th/0104005.
- [AHC01b] N. Arkani-Hamed, A. G. Cohen, and H. Georgi, *Electroweak symmetry breaking from dimensional deconstruction*, Phys. Lett. **B513**, 232 (2001), hep-ph/0105239.
- [AHCW02] N. Arkani-Hamed, A. G. Cohen, T. Gregoire, and J. G. Wacker, *Phenomenology of electroweak symmetry breaking from theory space*, JHEP **0208**, 020 (2002), hep-ph/0202089.
- [AHCKN02] N. Arkani-Hamed, A. G. Cohen, E. Katz, and A. E. Nelson, *The littlest Higgs*, JHEP **0207**, 034 (2002), hep-ph/0206021.
- [AKW86] T. W. Appelquist, D. Karabali, and L. C. R. Wijewardhana, *Chiral hierarchies and the flavor changing neutral current problem in technicolor*, Phys. Rev. Lett. **57**, 957 (1986).
- [APQ72] T. W. Appelquist, J. R. Primack, and H. R. Quinn, *Higher-order contributions to  $\mu$  decay in a spontaneously broken gauge model*, Phys. Rev. **D6**, 2998 (1972).
- [APQ73] T. W. Appelquist, J. R. Primack, and H. R. Quinn, *Renormalization of gauge theories,  $W$  decay, and  $\mu$  decay*, Phys. Rev. **D7**, 2998 (1973).
- [AQ72] T. Appelquist and H. R. Quinn, *Divergence cancellations in a simplified weak interaction model*, Phys. Lett. **B39**, 229 (1972).
- [AW87] T. Appelquist and L. C. R. Wijewardhana, *Chiral hierarchies and chiral perturbations in technicolor*, Phys. Rev. **D35**, 774 (1987).
- [B<sup>+</sup>97] D. Y. Bardin *et al.*, *Electroweak Working Group report* (1997), hep-ph/9709229.
- [Bal89] R. D. Ball, *Chiral gauge theory*, Phys. Rept. **182**, 1 (1989).
- [Bar69] W. A. Bardeen, *Anomalous Ward identities in spinor field theories*, Phys. Rev. **184**, 1848 (1969).
- [BBCD85] A. Barroso, F. Boudjema, J. Cole, and N. Dombey, *Electromagnetic properties of the  $Z$  boson. 1*, Z. Phys. **C28**, 149 (1985).
- [BEG94] J. Bijnens, G. Ecker, and J. Gasser, *Chiral perturbation theory*, in [MPP95] hep-ph/9411232.
- [BEM99] E. Bagan, D. Espriu, and J. Manzano, *The effective electroweak chiral lagrangian: The matter sector*, Phys. Rev. **D60**, 114035 (1999), hep-ph/9809237.
- [BGK<sup>+</sup>94] C. P. Burgess, S. Godfrey, H. Konig, D. London, and I. Maksymyk, *Model independent global constraints on new physics*, Phys. Rev. **D49**, 6115 (1994), hep-ph/9312291.
- [BIM72] C. Bouchiat, J. Iliopoulos, and P. Meyer, *An anomaly-free version of Weinberg's model*, Phys. Lett. **B38**, 519 (1972).
- [BL93] C. P. Burgess and D. London, *Uses and abuses of effective lagrangians*, Phys. Rev. **D48**, 4337 (1993), hep-ph/9203216.
- [BMNT82] A. P. Balachandran, G. Marmo, V. P. Nair, and C. G. Trahern, *Nonperturbative proof of the nonabelian anomalies*, Phys. Rev. **D25**, 2713 (1982).
- [BP99] D. Y. Bardin and G. Passarino, *The Standard Model in the making: Precision study of the electroweak interactions*, Oxford Univ. Press (1999).

- [BPR03] R. Barbieri, A. Pomarol, and R. Rattazzi, *Weakly coupled Higgsless theories and precision electroweak tests* (2003), [hep-ph/0310285](#).
- [BV85] A. O. Barvinsky and G. A. Vilkovisky, *The generalized Schwinger-DeWitt technique in gauge theories and quantum gravity*, *Phys. Rept.* **119**, 1 (1985).
- [BW86] W. Buchmüller and D. Wyler, *Effective lagrangian analysis of new interactions and flavor conservation*, *Nucl. Phys.* **B268**, 621 (1986).
- [BYS80] T. Banks, S. Yankielowicz, and A. Schwimmer, *Anomaly constraints in chiral gauge theories*, *Phys. Lett.* **B96**, 67 (1980).
- [Cab63] N. Cabibbo, *Unitary symmetry and leptonic decays*, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 531 (1963).
- [CCGT04] G. Cacciapaglia, C. Csáki, C. Grojean, and J. Terning, *Oblique corrections from Higgsless models in warped space* (2004), [hep-ph/0401160](#).
- [CCWZ69] C. G. Callan, S. R. Coleman, J. Wess, and B. Zumino, *Structure of phenomenological lagrangians. 2*, *Phys. Rev.* **177**, 2247 (1969).
- [CD03] M.-C. Chen and S. Dawson, *One-loop radiative corrections to the  $\rho$  parameter in the littlest Higgs model* (2003), [hep-ph/0311032](#).
- [CDCD<sup>+</sup>89] R. Casalbuoni, S. De Curtis, D. Dominici, F. Feruglio, and R. Gatto, *Vector and axial vector bound states from a strongly interacting electroweak sector*, *Int. J. Mod. Phys.* **A4**, 1065 (1989).
- [CDCDG87] R. Casalbuoni, S. De Curtis, D. Dominici, and R. Gatto, *Physical implications of possible  $J=1$  bound states from strong Higgs*, *Nucl. Phys.* **B282**, 235 (1987).
- [CDO03] R. Casalbuoni, A. Deandrea, and M. Oertel, *Little Higgs models and precision electroweak data* (2003), [hep-ph/0311038](#).
- [CG82] S. R. Coleman and B. Grossman, *'t Hooft's consistency condition as a consequence of analyticity and unitarity*, *Nucl. Phys.* **B203**, 205 (1982).
- [CGJZ00] M. Czakon, J. Gluza, F. Jegerlehner, and M. Zralek, *Confronting electroweak precision measurements with new physics models*, *Eur. Phys. J.* **C13**, 275 (2000), [hep-ph/9909242](#).
- [CGM<sup>+</sup>03] C. Csáki, C. Grojean, H. Murayama, L. Pilo, and J. Terning, *Gauge theories on an interval: Unitarity without a Higgs* (2003), [hep-ph/0305237](#).
- [CGPT03] C. Csáki, C. Grojean, L. Pilo, and J. Terning, *Towards a realistic model of Higgsless electroweak symmetry breaking* (2003), [hep-ph/0308038](#).
- [Cha98] M. S. Chanowitz, *Strong WW scattering at the end of the 90's: Theory and experimental prospects*, in [Gra98] [hep-ph/9812215](#).
- [Chi98] R. S. Chivukula, *Models of electroweak symmetry breaking* (1998), [hep-ph/9803219](#).
- [CHK<sup>+</sup>03a] C. Csáki, J. Hubisz, G. D. Kribs, P. Meade, and J. Terning, *Big corrections from a little Higgs*, *Phys. Rev.* **D67**, 115002 (2003), [hep-ph/0211124](#).
- [CHK<sup>+</sup>03b] C. Csáki, J. Hubisz, G. D. Kribs, P. Meade, and J. Terning, *Variations of little Higgs models and their electroweak constraints* (2003), [hep-ph/0303236](#).
- [CHPW01] H.-C. Cheng, C. T. Hill, S. Pokorski, and J. Wang, *The Standard Model in the latticized bulk*, *Phys. Rev.* **D64**, 065007 (2001), [hep-th/0104179](#).
- [CKT04] R. S. Chivukula, M. Kurachi, and M. Tanabashi, *Generalized Weinberg sum rules in deconstructed QCD* (2004), [hep-ph/0403112](#).
- [CL91] M. Cvetič and P. Langacker, editors, *Testing the Standard Model*, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Boulder, CO, 1990, World Scientific Publishing (1991).
- [CLT73] J. M. Cornwall, D. N. Levin, and G. Tiktopoulos, *Uniqueness of spontaneously broken gauge theories*, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1268 (1973).
- [CLT74] J. M. Cornwall, D. N. Levin, and G. Tiktopoulos, *Derivation of gauge invariance from high-energy unitarity bounds on the S-matrix*, *Phys. Rev.* **D10**, 1145 (1974).
- [CN73] J. M. Cornwall and R. E. Norton, *Spontaneous symmetry breaking without scalar mesons*, *Phys. Rev.* **D8**, 3338 (1973).
- [CNP03] R. Contino, Y. Nomura, and A. Pomarol, *Higgs as a holographic pseudo-Goldstone boson* (2003), [hep-ph/0306259](#).
- [Col84] J. C. Collins, *Renormalisation. An introduction to renormalization, the renormalization group, and the operator product expansion*, Cambridge Univ. Press (1984).
- [CS86] N. S. Craigie and J. Stern, *Effective gauge theories of composite W, Z and massless fermions*, *Fortschr. Phys.* **34**, 261 (1986).
- [CW03] S. Chang and J. G. Wacker, *Little Higgs and custodial SU(2)* (2003), [hep-ph/0303001](#).

- [CWZ69] S. R. Coleman, J. Wess, and B. Zumino, *Structure of phenomenological lagrangians. 1*, Phys. Rev. **177**, 2239 (1969).
- [Dav79] A. Davidson, *B – L as the fourth color, quark-lepton correspondence, and natural masslessness of neutrinos within a generalized WS model*, Phys. Rev. **D20**, 776 (1979).
- [DEH91] A. Dobado, D. Espriu, and M. J. Herrero, *Chiral lagrangians as a tool to probe the symmetry breaking sector of the SM at LEP*, Phys. Lett. **B255**, 405 (1991).
- [DFG+02] S. Davidson, S. Forte, P. Gambino, N. Rius, and A. Strumia, *Old and new physics interpretations of the NuTeV anomaly*, JHEP **02**, 037 (2002), hep-ph/0112302.
- [DG00] S. Descotes-Genon, *Effet des boucles de quarks légers sur la structure du vide de QCD*, PhD thesis Université Paris XI Orsay (2000).
- [DGH92] J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*, Cambridge Univ. Press (1992).
- [DGM+67] T. Das, G. S. Guralnik, V. S. Mathur, F. E. Low, and J. E. Young, *Electromagnetic mass difference of pions*, Phys. Rev. Lett. **18**, 759 (1967).
- [DHH+03] G. Degrandi, S. Heinemeyer, W. Hollik, P. Slavich, and G. Weiglein, *Towards high-precision predictions for the MSSM Higgs sector*, Eur. Phys. J. **C28**, 133 (2003), hep-ph/0212020.
- [dR97] E. de Rafael, *An introduction to sum rules in QCD*, in [GMdRD99] hep-ph/9802448.
- [DS79] S. Dimopoulos and L. Susskind, *Mass without scalars*, Nucl. Phys. **B155**, 237 (1979).
- [EB64] F. Englert and R. Brout, *Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons*, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964).
- [EGL+89] G. Ecker, J. Gasser, H. Leutwyler, A. Pich, and E. de Rafael, *Chiral lagrangians for massive spin-1 fields*, Phys. Lett. **B223**, 425 (1989).
- [EGPdR89] G. Ecker, J. Gasser, A. Pich, and E. de Rafael, *The role of resonances in Chiral Perturbation Theory*, Nucl. Phys. **B321**, 311 (1989).
- [EH92] D. Espriu and M. J. Herrero, *Chiral lagrangians and precision tests of the symmetry-breaking sector of the Standard Model*, Nucl. Phys. **B373**, 117 (1992).
- [EL80] E. Eichten and K. D. Lane, *Dynamical breaking of weak interaction symmetries*, Phys. Lett. **B90**, 125 (1980).
- [Eli75] S. Elitzur, *Impossibility of spontaneously breaking local symmetries*, Phys. Rev. **D12**, 3978 (1975).
- [EM94] D. Espriu and J. Matias, *Regularization methods in Chiral Perturbation Theory*, Nucl. Phys. **B418**, 494 (1994), hep-th/9307086.
- [Fer93] F. Feruglio, *The chiral approach to the electroweak interactions*, Int. J. Mod. Phys. **A8**, 4937 (1993), hep-ph/9301281.
- [FLS72] K. Fujikawa, B. W. Lee, and A. I. Sanda, *Generalized renormalizable gauge formulation of spontaneously broken gauge theories*, Phys. Rev. **D6**, 2923 (1972).
- [FS96] H. W. Fearing and S. Scherer, *Extension of the Chiral Perturbation Theory meson lagrangian to order  $\mathcal{O}(p^6)$* , Phys. Rev. **D53**, 315 (1996), hep-ph/9408346.
- [FSBY81] Y. Frishman, A. Schwimmer, T. Banks, and S. Yankielowicz, *The axial anomaly and the bound state spectrum in confining theories*, Nucl. Phys. **B177**, 157 (1981).
- [Fuj79] K. Fujikawa, *Path-integral measure for gauge invariant fermion theories*, Phys. Rev. Lett. **42**, 1195 (1979).
- [Fuj80] K. Fujikawa, *Path integral for gauge theories with fermions*, Phys. Rev. **D21**, 2848 (1980).
- [Geo84] H. Georgi, *Weak interactions and modern particle theory*, Benjamin/Cummings Publishing (1984).
- [Geo86] H. Georgi, *SU(2)  $\times$  U(1) breaking, compositeness, flavor and GUTs*, in [RS87].
- [Geo90] H. Georgi, *Vector realization of chiral symmetry*, Nucl. Phys. **B331**, 311 (1990).
- [Geo91] H. Georgi, *Effective field theory and electroweak radiative corrections*, Nucl. Phys. **B363**, 301 (1991).
- [GG72] H. Georgi and S. L. Glashow, *Gauge theories without anomalies*, Phys. Rev. **D6**, 429 (1972).
- [GHK64] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, *Global conservation laws and massless particles*, Phys. Rev. Lett. **13**, 585 (1964).
- [GHO+94] M. B. Gavela, P. Hernandez, J. Orloff, O. Pene, and C. Quimbay, *Standard Model CP violation and baryon asymmetry. Part 2: Finite temperature*, Nucl. Phys. **B430**, 382 (1994), hep-ph/9406289.
- [GIM70] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani, *Weak interactions with lepton-hadron symmetry*, Phys. Rev. **D2**, 1285 (1970).

- [GJ72] D. J. Gross and R. Jackiw, *Effect of anomalies on quasi-renormalizable theories*, Phys. Rev. **D6**, 477 (1972).
- [GKK93] C. Grosse-Knetter and R. Kögerler, *Unitary gauge, Stückelberg formalism and gauge invariant models for effective lagrangians*, Phys. Rev. **D48**, 2865 (1993), [hep-ph/9212268](#).
- [GL84] J. Gasser and H. Leutwyler, *Chiral Perturbation Theory to one loop*, Ann. Phys. **158**, 142 (1984).
- [GL85] J. Gasser and H. Leutwyler, *Chiral Perturbation Theory: Expansions in the mass of the strange quark*, Nucl. Phys. **B250**, 465 (1985).
- [GLR00a] G. J. Gounaris, J. Layssac, and F. M. Renard, *New and standard physics contributions to anomalous  $Z$  and  $\gamma$  self-couplings*, Phys. Rev. **D62**, 073013 (2000), [hep-ph/0003143](#).
- [GLR00b] G. J. Gounaris, J. Layssac, and F. M. Renard, *Signatures of the anomalous  $Z\gamma$  and  $ZZ$  production at the lepton and hadron colliders*, Phys. Rev. **D61**, 073013 (2000), [hep-ph/9910395](#).
- [GMdRD99] R. Gupta, A. Morel, E. de Rafael, and F. David, editors, *Probing the Standard Model of particle interactions*, NATO Advanced Study Institute, Les Houches, France, 1997, Pt. 2, North-Holland Publishing (1999).
- [GMRS79] M. Gell-Mann, P. Ramond, and R. Slansky, *Complex spinors and unified theories*, in [VNF79].
- [Gol61] J. Goldstone, *Field theories with ‘superconductor’ solutions*, Nuovo Cim. **19**, 154 (1961).
- [GR91] M. Golden and L. Randall, *Radiative corrections to electroweak parameters in technicolor theories*, Nucl. Phys. **B361**, 3 (1991).
- [Gra98] D. Graudenz, editor, *Hidden symmetries and Higgs phenomena*, Zuoz Summer School on Hidden Symmetries and Higgs Phenomena, Zuoz, Switzerland, 1998, PSI (1998).
- [GSW62] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Broken symmetries*, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).
- [GW73a] D. J. Gross and F. Wilczek, *Asymptotically free gauge theories. I*, Phys. Rev. **D8**, 3633 (1973).
- [GW73b] D. J. Gross and F. Wilczek, *Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [Hab91] H. E. Haber, *Lectures on electroweak symmetry breaking*, in [CL91].
- [Hab01] H. E. Haber, *Phenomenology of supersymmetry*, Summer school on particle physics, ICTP, Trieste, Italy, <http://agenda.ictp.trieste.it/agenda/current/fullAgenda.php?ida=a0138> (2001).
- [Hig64] P. W. Higgs, *Broken symmetries and the masses of gauge bosons*, Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964).
- [Hig66] P. W. Higgs, *Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons*, Phys. Rev. **145**, 1156 (1966).
- [Hil95] C. T. Hill, *Topcolor assisted technicolor*, Phys. Lett. **B345**, 483 (1995), [hep-ph/9411426](#).
- [HK85] H. E. Haber and G. L. Kane, *The search for supersymmetry: Probing physics beyond the Standard Model*, Phys. Rept. **117**, 75 (1985).
- [HLMW03] T. Han, H. E. Logan, B. McElrath, and L.-T. Wang, *Phenomenology of the little Higgs model* (2003), [hep-ph/0301040](#).
- [Hol81] B. Holdom, *Raising the sideways scale*, Phys. Rev. **D24**, 1441 (1981).
- [Hol85] B. Holdom, *Technicolor*, Phys. Lett. **B150**, 301 (1985).
- [Hoř94] J. Hořešší, *Introduction to electroweak unification: Standard Model from tree unitarity*, World Scientific Publishing (1994).
- [Hoř97] J. Hořešší, *Electroweak interactions and high-energy limit: An introduction to the equivalence theorem*, Czech. J. Phys. **47**, 951 (1997), [hep-ph/9603321](#).
- [HP96] P. Henrard and M. Perrottet, editors, *La chromodynamique quantique sous toutes ses couleurs*, Ecole d’Eté de Gif, Clermont-Ferrand, France, 1995, IN2P3 (1996).
- [HS] J. Hirn and J. Stern, in preparation.
- [HS03] C. T. Hill and E. H. Simmons, *Strong dynamics and electroweak symmetry breaking*, Phys. Rept. **381**, 235 (2003), [hep-ph/0203079](#).
- [HS04a] J. Hirn and J. Stern, *Anomaly-matching and Higgs-less effective theories* (2004), [hep-ph/0403017](#).
- [HS04b] J. Hirn and J. Stern, *The role of spurions in Higgs-less electroweak effective theories* (2004).
- [HT90] B. Holdom and J. Terning, *Large corrections to electroweak parameters in technicolor theories*, Phys. Lett. **B247**, 88 (1990).
- [Jeg91] F. Jegerlehner, *Renormalizing the Standard Model*, in [CL91].
- [JJ73] R. Jackiw and K. Johnson, *Dynamical model of spontaneously broken gauge symmetries*, Phys. Rev. **D8**, 2386 (1973).
- [Jog74] S. D. Joglekar, *S-matrix derivation of the Weinberg model*, Ann. Phys. **83**, 427 (1974).

- [Kai01] R. Kaiser, *Anomalies and WZW-term of two-flavour QCD*, Phys. Rev. **D63**, 076010 (2001), [hep-ph/0011377](#).
- [KAP72] C. P. Korthals Altes and M. Perrottet, *Anomalous Ward identities, gauge-variance and appearance of ghosts in Higgs-Kibble type theories*, Phys. Lett. **B39**, 546 (1972).
- [KdR98] M. Knecht and E. de Rafael, *Patterns of spontaneous chiral symmetry breaking in the large  $N_c$  limit of QCD-like theories*, Phys. Lett. **B424**, 335 (1998), [hep-ph/9712457](#).
- [KL73] W. Kummer and K. D. Lane, *Divergence cancellations in spontaneously broken gauge theories*, Phys. Rev. **D7**, 1910 (1973).
- [KL90] D. C. Kennedy and P. Langacker, *Precision electroweak experiments and heavy physics: A global analysis*, Phys. Rev. Lett. **65**, 2967 (1990).
- [KM73] M. Kobayashi and T. Maskawa,  *$CP$  violation in the renormalizable theory of weak interaction*, Prog. Theor. Phys. **49**, 652–657 (1973).
- [KM00] C. F. Kolda and H. Murayama, *The Higgs mass and new physics scales in the minimal Standard Model*, JHEP **07**, 035 (2000), [hep-ph/0003170](#).
- [KMSF95] M. Knecht, B. Moussallam, J. Stern, and N. H. Fuchs, *The low-energy  $\pi\pi$  amplitude to one and two loops*, Nucl. Phys. **B457**, 513 (1995), [hep-ph/9507319](#).
- [Kne96] M. Knecht, *La chromodynamique quantique à basse énergie*, in [HP96].
- [KNP04] Z. Kunszt, A. Nyffeler, and M. Puchwein, *Deconstructing non-abelian gauge theories at one loop* (2004), [hep-ph/0402269](#).
- [KPdR98] M. Knecht, S. Peris, and E. de Rafael, *The electroweak  $\pi^+ - \pi^0$  mass difference and weak matrix elements in the  $1/N_c$  expansion*, Phys. Lett. **B443**, 255 (1998), [hep-ph/9809594](#).
- [KS03] D. E. Kaplan and M. Schmaltz, *The little Higgs from a simple group* (2003), [hep-ph/0302049](#).
- [KU98] M. Knecht and R. Urech, *Virtual photons in low energy  $\pi\pi$  scattering*, Nucl. Phys. **B519**, 329 (1998), [hep-ph/9709348](#).
- [Lan02a] K. Lane, *A case study in dimensional deconstruction*, Phys. Rev. **D65**, 115001 (2002), [hep-ph/0202093](#).
- [Lan02b] K. Lane, *Two lectures on technicolor* (2002), [hep-ph/0202255](#).
- [Lan04] P. Langacker, *Electroweak physics*, AIP Conf. Proc. **698**, 1 (2004), [hep-ph/0308145](#).
- [LEP] LEP Electroweak Working Group Collaboration, <http://lepewwg.web.cern.ch/LEPEWWG/>.
- [Leu94] H. Leutwyler, *On the foundations of Chiral Perturbation Theory*, Ann. Phys. **235**, 165 (1994), [hep-ph/9311274](#).
- [Lon80] A. C. Longhitano, *Heavy Higgs bosons in the Weinberg-Salam model*, Phys. Rev. **D22**, 1166 (1980).
- [Lon81] A. C. Longhitano, *Low-energy impact of a heavy Higgs boson sector*, Nucl. Phys. **B188**, 118 (1981).
- [LY62] T. D. Lee and C.-N. Yang, *Theory of charged vector mesons interacting with the electromagnetic field*, Phys. Rev. **128**, 885 (1962).
- [M<sup>+</sup>03] K. S. McFarland *et al.*,  $\sin^2\theta_W$  from neutrino scattering at NuTeV, Int. J. Mod. Phys. **A18**, 3841 (2003).
- [Mat04] K. Matchev, *TASI lectures on precision electroweak physics* (2004), [hep-ph/0402031](#).
- [Mei88] U.-G. Meißner, *Low-energy hadron physics from effective chiral lagrangians with vector mesons*, Phys. Rept. **161**, 213 (1988).
- [MG84] A. Manohar and H. Georgi, *Chiral quarks and the nonrelativistic quark model*, Nucl. Phys. **B234**, 189 (1984).
- [MM80] R. N. Mohapatra and R. E. Marshak, *Local  $B - L$  symmetry of electroweak interactions, Majorana neutrinos and neutron oscillations*, Phys. Rev. Lett. **44**, 1316 (1980).
- [MNP98] G. Montagna, O. Nicrosini, and F. Piccinini, *Precision physics at LEP*, Riv. Nuovo Cim. **21N9**, 1 (1998), [hep-ph/9802302](#).
- [MNS62] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, *Remarks on the unified model of elementary particles*, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1962).
- [Mou97] B. Moussallam, *A sum rule approach to the violation of Dashen's theorem*, Nucl. Phys. **B504**, 381 (1997), [hep-ph/9701400](#).
- [MPP95] L. Maiani, G. Pancheri, and N. Paver, editors, *The second DAPHNE physics handbook*, INFN (1995).
- [MR90] W. J. Marciano and J. L. Rosner, *Atomic parity violation as a probe of new physics*, Phys. Rev. Lett. **65**, 2963 (1990).
- [Nam60] Y. Nambu, *Axial vector current conservation in weak interactions*, Phys. Rev. Lett. **4**, 380 (1960).

- [N<sub>JL</sub>61a] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I*, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
- [N<sub>JL</sub>61b] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II*, Phys. Rev. **124**, 246 (1961).
- [NS96] A. Nyffeler and A. Schenk, *Effective field theory for a heavy Higgs: A manifestly gauge invariant approach*, Phys. Rev. **D53**, 1494 (1996), [hep-ph/9507287](#).
- [NS00] A. Nyffeler and A. Schenk, *The electroweak chiral lagrangian reanalyzed*, Phys. Rev. **D62**, 113006 (2000), [hep-ph/9907294](#).
- [Nyf] A. Nyffeler, *private communication*.
- [Nyf99] A. Nyffeler, *The electroweak chiral lagrangian revisited* (1999), [hep-ph/9912472](#).
- [O'R98] L. O'Raiartaigh, *Hidden symmetry*, in [Gra98] <http://ltpth.web.psi.ch/zuoz/zuoz1998>.
- [PDG] Particle Data Group Collaboration, K. Hagiwara *et al.*, *Review of particle physics*, Phys. Rev. **D66**, 010001 (2002), <http://pdg.lbl.gov/>.
- [Pes80] M. E. Peskin, *The alignment of the vacuum in theories of technicolor*, Nucl. Phys. **B175**, 197 (1980).
- [Pok01] S. Pokorski, *Physics of extra dimensions as ir limit of four-dimensional theories*, J. Phys. **G27**, 2479 (2001), [hep-th/0107052](#).
- [Pol73] H. D. Politzer, *Reliable perturbative results for strong interactions?*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [Pon58] B. Pontecorvo, *Inverse beta processes and non-conservation of lepton charge*, Sov. Phys. JETP **7**, 172 (1958).
- [PT90] M. E. Peskin and T. Takeuchi, *New constraint on a strongly interacting Higgs sector*, Phys. Rev. Lett. **65**, 964 (1990).
- [PT92] M. E. Peskin and T. Takeuchi, *Estimation of oblique electroweak corrections*, Phys. Rev. **D46**, 381 (1992).
- [PZ90] R. D. Peccei and X. Zhang, *Dynamical symmetry breaking and universality breakdown*, Nucl. Phys. **B337**, 269 (1990).
- [Ren82] F. M. Renard, *Tests of neutral gauge boson self-couplings with  $e^+e^- \rightarrow \gamma Z$* , Nucl. Phys. **B196**, 93 (1982).
- [RS87] P. Ramond and R. Stora, editors, *Architecture of fundamental interactions at short distances*, NATO Advanced Study Institute, Les Houches, France, 1985, Pt. 1, North-Holland Publishing (1987).
- [RS99] L. Randall and R. Sundrum, *A large mass hierarchy from a small extra dimension*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999), [hep-ph/9905221](#).
- [RV77] G. C. Rossi and G. Veneziano, *A possible description of baryon dynamics in dual and gauge theories*, Nucl. Phys. **B123**, 507 (1977).
- [Sak69] J. J. Sakurai, *Currents and mesons*, Univ. of Chicago Press (1969).
- [Sch51] J. S. Schwinger, *On gauge invariance and vacuum polarization*, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [Sch02] S. Scherer, *Introduction to Chiral Perturbation Theory* (2002), [hep-ph/0210398](#).
- [SCW98] G. Sánchez-Colón and J. Wudka, *Effective operator contributions to the oblique parameters*, Phys. Lett. **B432**, 383 (1998), [hep-ph/9805366](#).
- [SF95] S. Scherer and H. W. Fearing, *Field transformations and the classical equation of motion in Chiral Perturbation Theory*, Phys. Rev. **D52**, 6445 (1995), [hep-ph/9408298](#).
- [SM75] G. Senjanovic and R. N. Mohapatra, *Exact left-right symmetry and spontaneous violation of parity*, Phys. Rev. **D12**, 1502 (1975).
- [SS79] O. Sawada and A. Sugamoto, editors, *Proceedings of the workshop on the unified theory and the baryon number in the universe, KEK, Japan, 1979* (1979).
- [SS03] D. T. Son and M. A. Stephanov, *QCD and dimensional deconstruction* (2003), [hep-ph/0304182](#).
- [SSVZ80] P. Sikivie, L. Susskind, M. B. Voloshin, and V. I. Zakharov, *Isospin breaking in technicolor models*, Nucl. Phys. **B173**, 189 (1980).
- [Sus79] L. Susskind, *Dynamics of spontaneous symmetry breaking in the Weinberg-Salam theory*, Phys. Rev. **D20**, 2619 (1979).
- [SVZ79] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, *QCD and resonance physics. Sum rules*, Nucl. Phys. **B147**, 385 (1979).
- [Tev] Tevatron Electroweak Working Group Collaboration, <http://tevewwg.fnal.gov/>.
- [tH71a] G. 't Hooft, *Renormalizable lagrangians for massive Yang-Mills fields*, Nucl. Phys. **B35**, 167 (1971).
- [tH71b] G. 't Hooft, *Renormalization of massless Yang-Mills fields*, Nucl. Phys. **B33**, 173 (1971).

- [tH74] G. 't Hooft, *A planar diagram theory for strong interactions*, Nucl. Phys. **B72**, 461 (1974).
- [tH79a] G. 't Hooft, *Naturalness, chiral symmetry, and spontaneous chiral symmetry breaking*, in [tH<sup>+</sup>80].
- [tH79b] G. 't Hooft, *Why do we need local gauge invariance in theories with vector particles? An introduction*, in [tH<sup>+</sup>80].
- [tH<sup>+</sup>80] G. 't Hooft *et al.*, editors, *Recent developments in gauge theories*, NATO Advanced Study Institute, Cargèse, France, 1979, Plenum Press (1980).
- [Tsu89] I. Tsutsui, *Origin of anomalies in the path integral formalism*, Phys. Rev. **D40**, 3543 (1989).
- [Ure95] R. Urech, *Virtual photons in Chiral Perturbation Theory*, Nucl. Phys. **B433**, 234 (1995), hep-ph/9405341.
- [Vel81] M. J. G. Veltman, *The infrared-ultraviolet connection*, Acta Phys. Polon. **B12**, 437 (1981).
- [Ver00] J. A. M. Vermaseren, *New features of FORM* (2000), math-ph/0010025.
- [VNF79] P. Van Nieuwenhuizen and D. Z. Freedman, editors, *Supergravity*, Workshop at Stony Brook, 1979, North-Holland Publishing (1979).
- [Wei67a] S. Weinberg, *A model of leptons*, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [Wei67b] S. Weinberg, *Precise relations between the spectra of vector and axial-vector mesons*, Phys. Rev. Lett. **18**, 507 (1967).
- [Wei71] S. Weinberg, *Physical processes in a convergent theory of the weak and electromagnetic interactions*, Phys. Rev. Lett. **27**, 1688 (1971).
- [Wei73a] S. Weinberg, *General theory of broken local symmetries*, Phys. Rev. **D7**, 1068 (1973).
- [Wei73b] S. Weinberg, *Perturbative calculations of symmetry breaking*, Phys. Rev. **D7**, 2887 (1973).
- [Wei73c] M. Weinstein, *Conserved currents, their commutators and the symmetry structure of renormalizable theories of electromagnetic, weak and strong interactions*, Phys. Rev. **D8**, 2511 (1973).
- [Wei79a] S. Weinberg, *Implications of dynamical symmetry breaking: An addendum*, Phys. Rev. **D19**, 1277 (1979).
- [Wei79b] S. Weinberg, *Baryon and lepton nonconserving processes*, Phys. Rev. Lett. **43**, 1566 (1979).
- [Wei79c] S. Weinberg, *Phenomenological lagrangians*, Physica **A96**, 327 (1979).
- [Wei96] S. Weinberg, *The quantum theory of fields, vol. 2: Modern applications*, Cambridge Univ. Press (1996).
- [Wil69] K. G. Wilson, *Nonlagrangian models of current algebra*, Phys. Rev. **179**, 1499 (1969).
- [Wit79] E. Witten, *Baryons in the 1/N expansion*, Nucl. Phys. **B160**, 57 (1979).
- [Wit83] E. Witten, *Some inequalities among hadron masses*, Phys. Rev. Lett. **51**, 2351 (1983).
- [Wud94] J. Wudka, *Electroweak effective lagrangians*, Int. J. Mod. Phys. **A9**, 2301 (1994), hep-ph/9406205.
- [WZ71] J. Wess and B. Zumino, *Consequences of anomalous Ward identities*, Phys. Lett. **B37**, 95 (1971).
- [Yan79] T. Yanagida, *Contribution*, in [SS79].